

2020 年普通高等学校招生全国统一考试
文科数学试题参考答案(A卷)

选择题答案

一、选择题

1. D 2. C 3. C 4. A 5. D 6. B
7. C 8. B 9. C 10. D 11. B 12. A

非选择题答案

二、填空题

13. 1 14. 5 15. $y = 2x$ 16. 7

三、解答题

17. 解:

(1) 由试加工产品等级的频数分布表知,

甲分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{40}{100} = 0.4$;

乙分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{28}{100} = 0.28$.

(2) 由数据知甲分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	65	25	-5	-75
频数	40	20	20	20

因此甲分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为

$$\frac{65 \times 40 + 25 \times 20 - 5 \times 20 - 75 \times 20}{100} = 15.$$

由数据知乙分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	70	30	0	-70
频数	28	17	34	21

因此乙分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为

$$\frac{70 \times 28 + 30 \times 17 + 0 \times 34 - 70 \times 21}{100} = 10.$$

比较甲、乙两分厂加工的产品的平均利润, 应选甲分厂承接加工业务.

18. 解:

(1) 由题设及余弦定理得 $28 = 3c^2 + c^2 - 2 \times \sqrt{3}c^2 \times \cos 150^\circ$.
解得 $c = -2$ (舍去), $c = 2$, 从而 $a = 2\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \sin 150^\circ = \sqrt{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 180^\circ - B - C = 30^\circ - C$, 所以

$$\sin A + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ - C) + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ + C).$$

$$\text{故 } \sin(30^\circ + C) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

而 $0^\circ < C < 30^\circ$, 所以 $30^\circ + C = 45^\circ$, 故 $C = 15^\circ$.

19. 解:

(1) 由题设可知, $PA = PB = PC$.

由于 $\triangle ABC$ 是正三角形, 故可得 $\triangle PAC \cong \triangle PAB$,
 $\triangle PAC \cong \triangle PBC$.

又 $\angle APC = 90^\circ$, 故 $\angle APB = 90^\circ$, $\angle BPC = 90^\circ$.

从而 $PB \perp PA$, $PB \perp PC$, 故 $PB \perp$ 平面 PAC , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAC .

(2) 设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l .

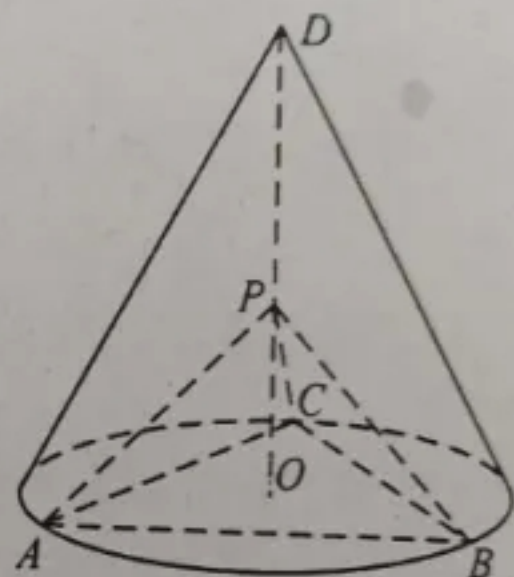
由题设可得 $rl = \sqrt{3}$, $l^2 - r^2 = 2$.

解得 $r = 1$, $l = \sqrt{3}$.

从而 $AB = \sqrt{3}$. 由 (1) 可得 $PA^2 + PB^2 = AB^2$, 故 $PA = PB = PC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PA \times PB \times PC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$



20. 解:

(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x - 2$, 则 $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

$$(2) f'(x) = e^x - a.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 至多存在 1 个零点, 不合题意.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \ln a$. 当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增, 故当 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\ln a) = -a(1 + \ln a)$.

(i) 若 $0 < a \leq \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 至多存在 1 个零点, 不合题意.

(ii) 若 $a > \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) < 0$.

由于 $f(-2) = e^{-2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 存在唯一零点.

由 (1) 知, 当 $x > 2$ 时, $e^x - x - 2 > 0$, 所以当 $x > 4$ 且 $x > 2 \ln(2a)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} - a(x+2) \\ &> e^{\ln(2a)} \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right) - a(x+2) \\ &= 2a \\ &> 0. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 存在唯一零点. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有两个零点.

综上, a 的取值范围是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

21. 解:

(1) 由题设得 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $G(0, 1)$.

则 $\overrightarrow{AG} = (a, 1)$, $\overrightarrow{GB} = (a, -1)$. 由 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$ 得 $a^2 - 1 = 8$, 即 $a = 3$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(2) 设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, $P(6, t)$.

若 $t \neq 0$, 设直线 CD 的方程为 $x = my + n$, 由题意可知 $-3 < n < 3$.

由于直线 PA 的方程为 $y = \frac{t}{9}(x+3)$, 所以 $y_1 = \frac{t}{9}(x_1+3)$.

直线 PB 的方程为 $y = \frac{t}{3}(x-3)$, 所以 $y_2 = \frac{t}{3}(x_2-3)$.

可得 $3y_1(x_2-3) = y_2(x_1+3)$.

由于 $\frac{x_2^2}{9} + y_2^2 = 1$, 故 $y_2^2 = -\frac{(x_2+3)(x_2-3)}{9}$, 可得 $27y_1y_2 = -(x_1+3)(x_2+3)$, 即

$$(27+m^2)y_1y_2 + m(n+3)(y_1+y_2) + (n+3)^2 = 0. \quad ①$$

将 $x = my + n$ 代入 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 得

$$(m^2+9)y^2 + 2mny + n^2 - 9 = 0.$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2+9}, \quad y_1y_2 = \frac{n^2-9}{m^2+9}.$$

代入①式得 $(27+m^2)(n^2-9) - 2m(n+3)mn + (n+3)^2(m^2+9) = 0$.

解得 $n = -3$ (舍去), $n = \frac{3}{2}$.

故直线 CD 的方程为 $x = my + \frac{3}{2}$, 即直线 CD 过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

若 $t = 0$, 则直线 CD 的方程为 $y = 0$, 过点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

综上, 直线 CD 过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

22. 解:

(1) 当 $k=1$ 时, $C_1: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ 消去参数 t 得 $x^2 + y^2 = 1$, 故曲线 C_1 是圆心为坐标

原点, 半径为 1 的圆.

(2) 当 $k=4$ 时, $C_1: \begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases}$ 消去参数 t 得 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

C_2 的直角坐标方程为 $4x - 16y + 3 = 0$.

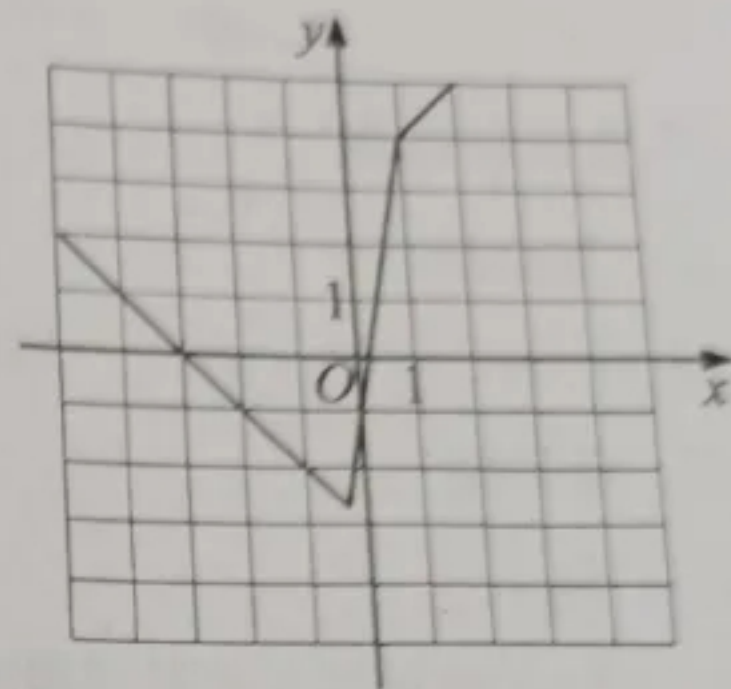
$$\text{由 } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

故 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

23. 解:

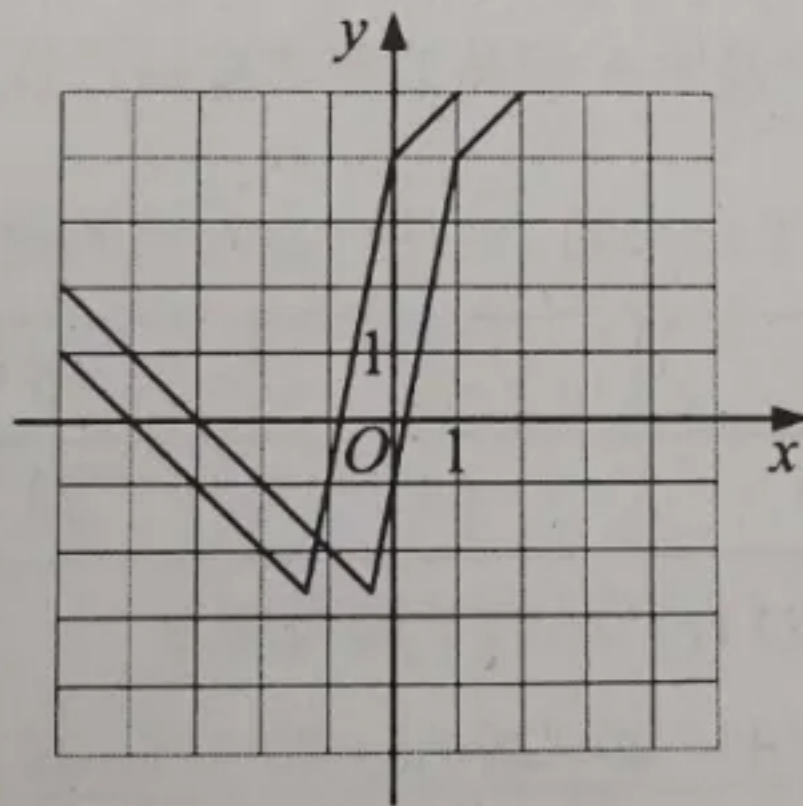
(1) 由题设知

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -\frac{1}{3}, \\ 5x-1, & -\frac{1}{3} < x \leq 1, \\ x+3, & x > 1. \end{cases}$$



$y = f(x)$ 的图像如图所示.

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位长度后得到函数 $y = f(x+1)$ 的图像.



$y = f(x)$ 的图像与 $y = f(x+1)$ 的图像的交点坐标为 $(-\frac{7}{6}, -\frac{11}{6})$.

由图像可知当且仅当 $x < -\frac{7}{6}$ 时, $y = f(x)$ 的图像在 $y = f(x+1)$ 的图像上方.

故不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{7}{6})$.

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案(B卷)

选择题答案

一、选择题

1. C 2. C 3. D 4. A 5. C 6. B
7. D 8. B 9. D 10. C 11. B 12. A

非选择题答案

二、填空题

13. 1 14. 5 15. $y = 2x$ 16. 7

三、解答题

17. 解:

(1) 由试加工产品等级的频数分布表知,

甲分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{40}{100} = 0.4$;

乙分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{28}{100} = 0.28$.

(2) 由数据知甲分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	65	25	-5	-75
频数	40	20	20	20

因此甲分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为

$$\frac{65 \times 40 + 25 \times 20 - 5 \times 20 - 75 \times 20}{100} = 15.$$

由数据知乙分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	70	30	0	-70
频数	28	17	34	21

因此乙分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为

$$\frac{70 \times 28 + 30 \times 17 + 0 \times 34 - 70 \times 21}{100} = 10.$$

比较甲、乙两分厂加工的产品的平均利润, 应选甲分厂承接加工业务.

18. 解:

(1) 由题设及余弦定理得 $28 = 3c^2 + c^2 - 2 \times \sqrt{3}c^2 \times \cos 150^\circ$.
解得 $c = -2$ (舍去), $c = 2$, 从而 $a = 2\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \sin 150^\circ = \sqrt{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 180^\circ - B - C = 30^\circ - C$, 所以

$$\sin A + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ - C) + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ + C).$$

$$\text{故 } \sin(30^\circ + C) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

而 $0^\circ < C < 30^\circ$, 所以 $30^\circ + C = 45^\circ$, 故 $C = 15^\circ$.

19. 解:

(1) 由题设可知, $PA = PB = PC$.

由于 $\triangle ABC$ 是正三角形, 故可得 $\triangle PAC \cong \triangle PAB$,

$\triangle PAC \cong \triangle PBC$.

又 $\angle APC = 90^\circ$, 故 $\angle APB = 90^\circ$, $\angle BPC = 90^\circ$.

从而 $PB \perp PA$, $PB \perp PC$, 故 $PB \perp$ 平面 PAC , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAC .

(2) 设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l .

由题设可得 $rl = \sqrt{3}$, $l^2 - r^2 = 2$.

解得 $r = 1$, $l = \sqrt{3}$.

从而 $AB = \sqrt{3}$. 由 (1) 可得 $PA^2 + PB^2 = AB^2$, 故 $PA = PB = PC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

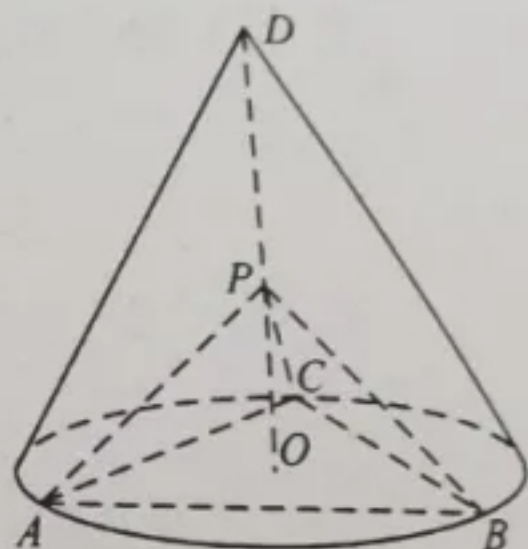
$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PA \times PB \times PC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

20. 解:

(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x - 2$, 则 $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.



$$(2) f'(x) = e^x - a.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 至多存在 1 个零点, 不合题意.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \ln a$. 当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增, 故当 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\ln a) = -a(1 + \ln a)$.

(i) 若 $0 < a \leq \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 至多存在 1 个零点, 不合题意.

(ii) 若 $a > \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) < 0$.

由于 $f(-2) = e^{-2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 存在唯一零点.

由 (1) 知, 当 $x > 2$ 时, $e^x - x - 2 > 0$, 所以当 $x > 4$ 且 $x > 2\ln(2a)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} - a(x+2) \\ &> e^{\ln(2a)} \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right) - a(x+2) \\ &= 2a \\ &> 0. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 存在唯一零点. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有两个零点.

综上, a 的取值范围是 $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

21. 解:

(1) 由题设得 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $G(0, 1)$.

则 $\overrightarrow{AG} = (a, 1)$, $\overrightarrow{GB} = (a, -1)$. 由 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$ 得 $a^2 - 1 = 8$, 即 $a = 3$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(2) 设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, $P(6, t)$.

若 $t \neq 0$, 设直线 CD 的方程为 $x = my + n$, 由题意可知 $-3 < n < 3$.

由于直线 PA 的方程为 $y = \frac{t}{9}(x+3)$, 所以 $y_1 = \frac{t}{9}(x_1+3)$.

直线 PB 的方程为 $y = \frac{t}{3}(x-3)$, 所以 $y_2 = \frac{t}{3}(x_2-3)$.

可得 $3y_1(x_2-3) = y_2(x_1+3)$.

由于 $\frac{x_2^2}{9} + y_2^2 = 1$, 故 $y_2^2 = -\frac{(x_2+3)(x_2-3)}{9}$, 可得 $27y_1y_2 = -(x_1+3)(x_2+3)$, 即

$$(27+m^2)y_1y_2 + m(n+3)(y_1+y_2) + (n+3)^2 = 0. \quad ①$$

将 $x = my + n$ 代入 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 得

$$(m^2+9)y^2 + 2mny + n^2 - 9 = 0.$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2+9}, \quad y_1y_2 = \frac{n^2-9}{m^2+9}.$$

代入①式得 $(27+m^2)(n^2-9) - 2m(n+3)mn + (n+3)^2(m^2+9) = 0$.

解得 $n = -3$ (舍去), $n = \frac{3}{2}$.

故直线 CD 的方程为 $x = my + \frac{3}{2}$, 即直线 CD 过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

若 $t = 0$, 则直线 CD 的方程为 $y = 0$, 过点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

综上, 直线 CD 过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

22. 解:

(1) 当 $k=1$ 时, $C_1: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ 消去参数 t 得 $x^2 + y^2 = 1$, 故曲线 C_1 是圆心为坐标

原点, 半径为 1 的圆.

(2) 当 $k=4$ 时, $C_1: \begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases}$ 消去参数 t 得 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

C_2 的直角坐标方程为 $4x - 16y + 3 = 0$.

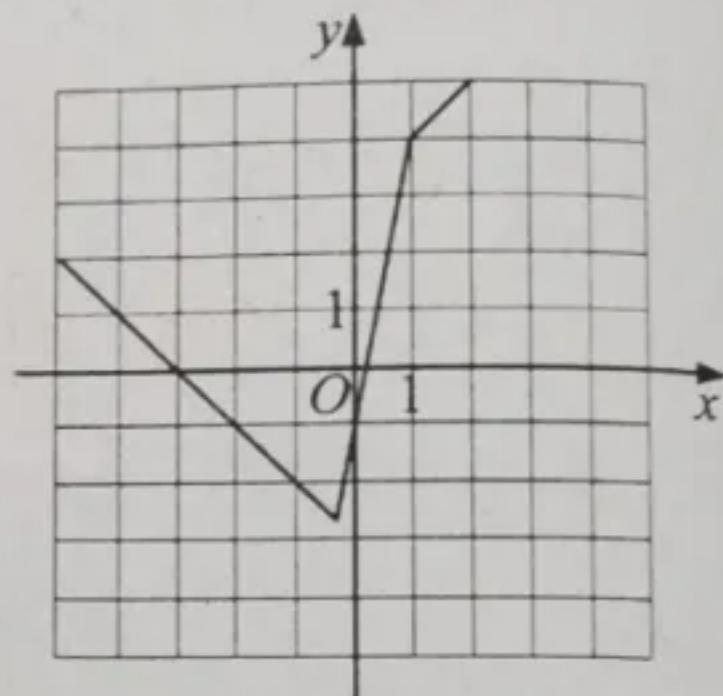
$$\text{由} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

故 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

23. 解:

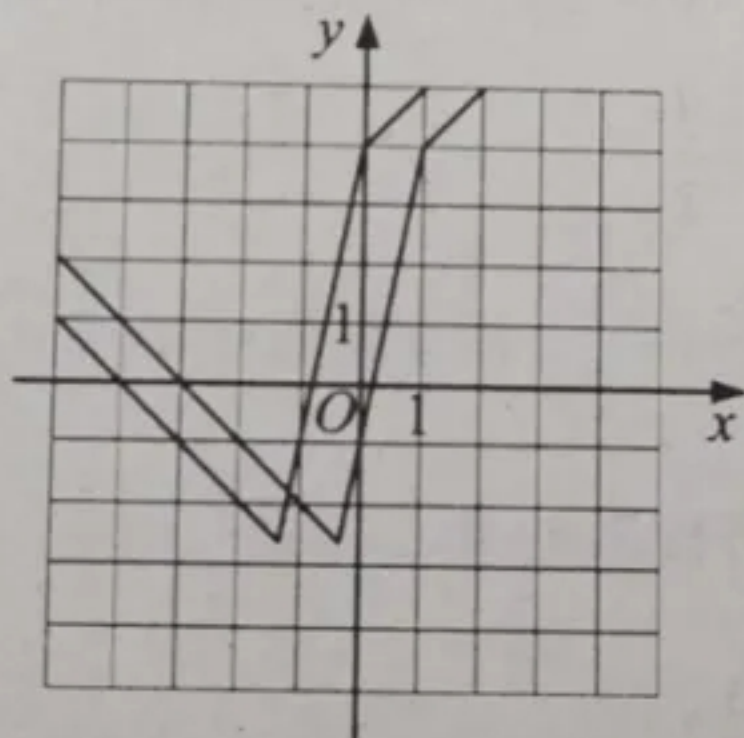
(1) 由题设知

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -\frac{1}{3}, \\ 5x-1, & -\frac{1}{3} < x \leq 1, \\ x+3, & x > 1. \end{cases}$$



$y = f(x)$ 的图像如图所示.

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位长度后得到函数 $y = f(x+1)$ 的图像.



$y = f(x)$ 的图像与 $y = f(x+1)$ 的图像的交点坐标为 $(-\frac{7}{6}, -\frac{11}{6})$.

由图像可知当且仅当 $x < -\frac{7}{6}$ 时, $y = f(x)$ 的图像在 $y = f(x+1)$ 的图像上方.

故不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{7}{6})$.