2016 年全国高考新课标 1 卷文科数学试题

第Ⅰ卷

一、选择题，本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|2\le x\le 5\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A．$\{1,3\}$　　B．$\{3,5\}$　　C．$\{5,7\}$　　D．$\{1,7\}$

2. 设 $(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 $a=$(　　)

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

3. 为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是(　　)

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

4. ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $a=\sqrt{5}, c=2, \cos A=\frac{2}{3}$，则 $b=$(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

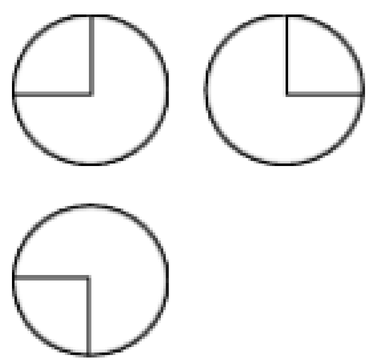
5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

6. 若将函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后，所得图像对应的函数为(　　)

A．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　B．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　C．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$　D．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

7. 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径．若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　　）

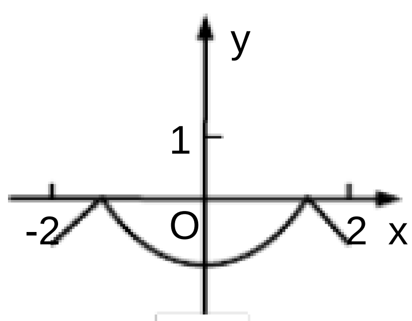


A．17π　　B．18π　　C．20π　　D．28π

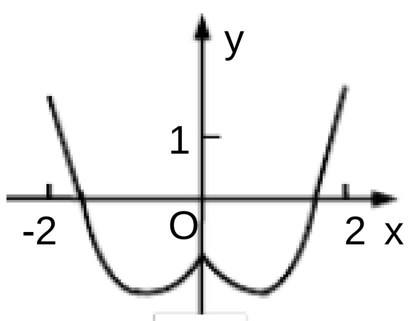
8. 若 $a>b>0$，$0<c<1$，则(　　)

A．$\log_a c<\log_b c$　　B．$\log_c a<\log_c b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$c^a>c^b$

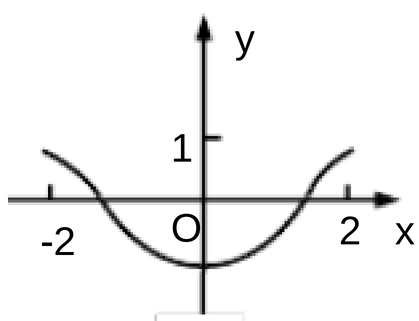
9. 函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为（　　）



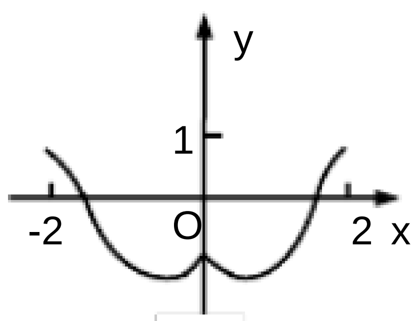
A



B



C

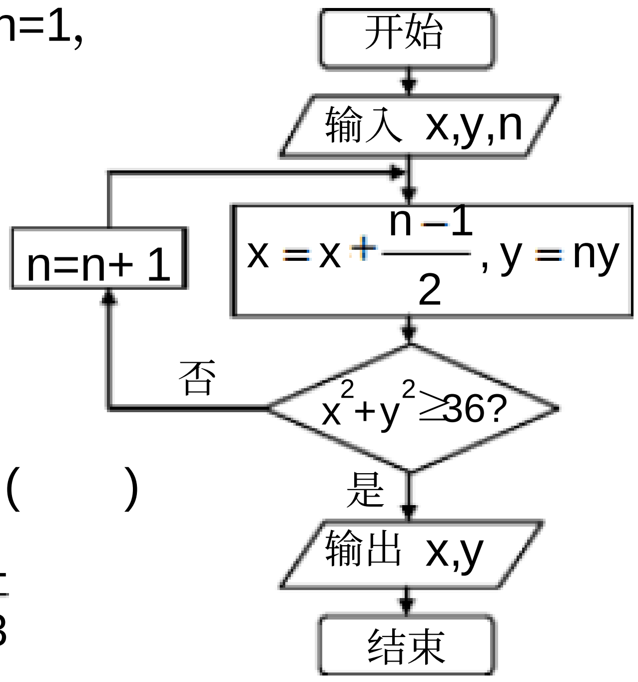


D

10. 执行右面的程序框图，如果输入的 $x=0$，$y=1$，$n=1$，则输出 x，y 的值满足 (　　)

A．$y=2x$　　　　B．$y=3x$

C．$y=4x$　　　　D．$y=5x$



11. 平面 α 过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，α//平面 CB_1D_1，$\alpha\cap$平面 $ABCD=m$，$\alpha\cap$平面 $ABB_1A_1=n$，则 m，n 所成角的正弦值为 (　　)

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　D．$\frac{1}{3}$

12. 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是 (　　)

A．$[-1,1]$　　　B．$[-1,\frac{1}{3}]$　　　C．$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　　　D．$[-1,-\frac{1}{3}]$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分 .第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22 题~第 24 题为选考题，考生根据要求作答 .

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在横线上．

13. 设向量 $\mathbf{a}=(x,\ x+1)$，$\mathbf{b}=(1,\ 2)$，且 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，则 $x=$______．

14. 已知 θ 是第四象限角，且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$_______．

15. 设直线 $y=x+2a$ 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为 ________．

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料 .生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元.该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为___________元．

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤 .只做 6 题，共 70 分．

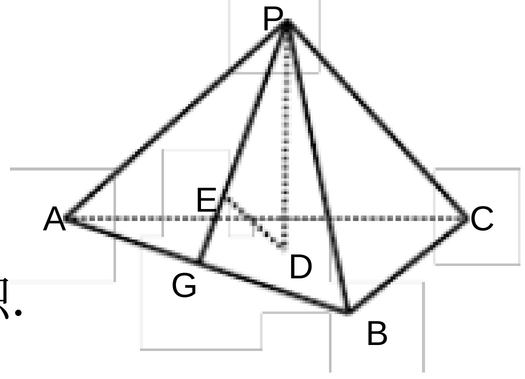
17.（本题满分 12 分）

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

(Ⅰ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；　　　(Ⅱ) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

18.（本题满分 12 分）

如图，已知正三棱锥 P-ABC 的侧面是直角三角形， PA=6，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D， D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于点 G.

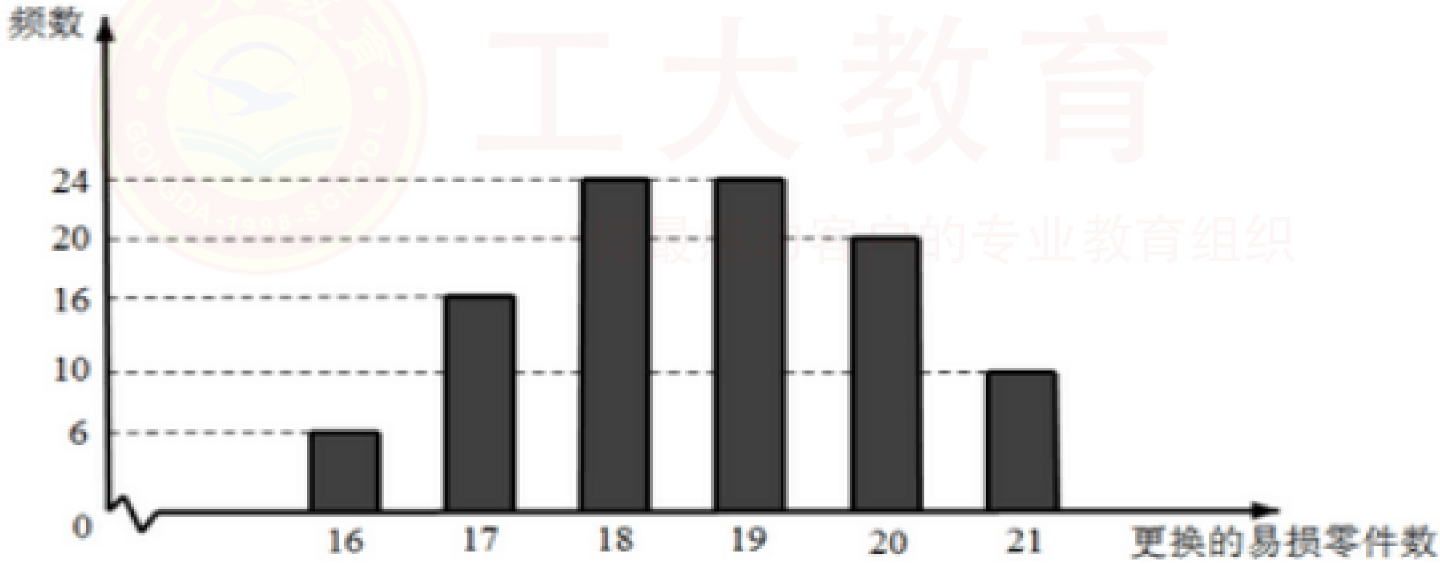


(Ⅰ)证明 G 是 AB 的中点；

(Ⅱ)在答题卡第（ 18）题图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F(说明作法及理由)，并求四面体 PDEF 的体积.

19.（本小题满分 12 分）

某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰 . 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买， 则每个 500 元.现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



记 x 表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数， y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元） ，n 表示购机的同时购买的易损零件数 .

(Ⅰ)若 n=19，求 y 与 x 的函数解析式；

(Ⅱ)若要求 需更换的易损零件数不大于 n 的频率不小于 0.5，求 n 的最小值；

(Ⅲ)假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件， 或每台都购买 20 个易损零件，分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件？

20.（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xoy 中，直线 $l: y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连结 ON 并延长交 C 于点 H.

(Ⅰ) 求 $\frac{|OH|}{|ON|}$；(Ⅱ) 除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由 .

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$.

(Ⅰ) 讨论 f(x) 的单调性；　(Ⅱ) 若有两个零点，求 a 的取值范围 .

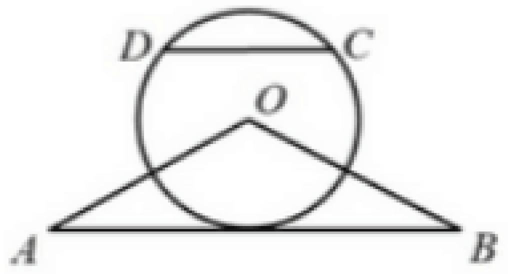
请考生在 **22、23、24** 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分，做答时请写清题号

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

如图，ΔOAB 是等腰三角形，$\angle AOB=120°$．以 O 为圆心，$\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆．

(Ⅰ)证明：直线 AB 与⊙O 相切；

(Ⅱ)点 C,D 在⊙O 上，且 A,B,C,D 四点共圆，证明：$AB\parallel CD$.



23.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直线坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=1+a\sin t \end{cases}$（t 为参数，a>0）．在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=4\cos\theta$

(Ⅰ)说明 C_1 是哪种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

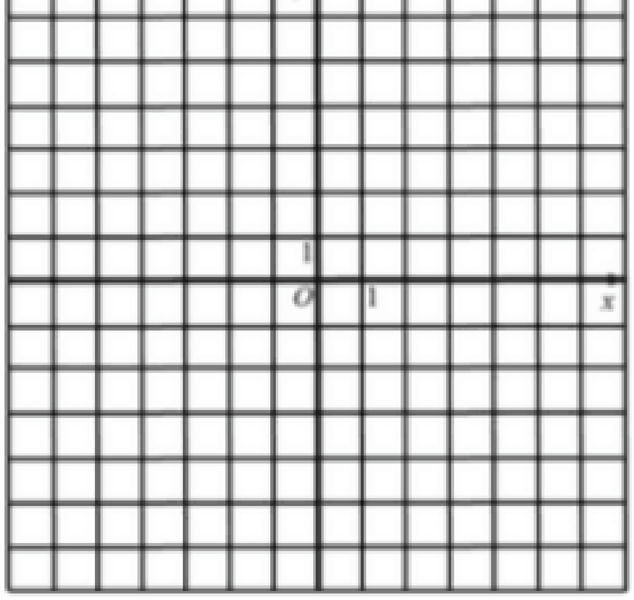
(Ⅱ)直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a.

24.（本小题满分 10 分），选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

(Ⅰ)在答题卡第 24 题图中画出 $y=f(x)$ 的图像；

(Ⅱ)求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集．



2016年全国高考新课标 1卷文科数学试 题参考答案

一、选择题，本大题共 12小题，每小题 5分，共 60分.

1B 2A 3C 4D 5B 6D 7A 8B 9D 10C 11A 12C

二、填空题：本大题共 4小题，每小题 5分，共 20分.

13. $-\frac{2}{3}$ 14. $-\frac{4}{3}$ 15. 4π 16. 216000

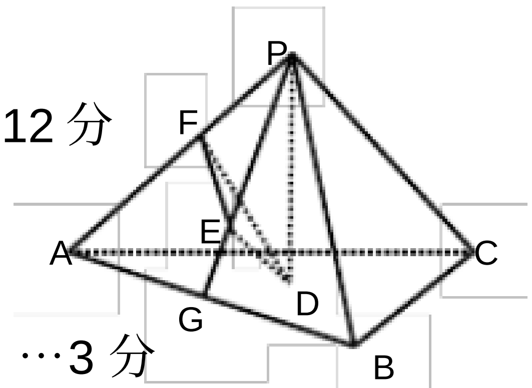
三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤 .只做 6题，共 70分.

17. 解：(Ⅰ)依题 $a_1b_2+b_2=b_1$，$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，解得 $a_1=2$ …2分

通项公式为 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$ …6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $3nb_{n+1}=nb_n$，$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$，所以$\{b_n\}$是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列 .…9分

所以$\{b_n\}$的前 n项和 $S_n=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ …12分



18. (Ⅰ)证明：PD⊥平面 ABC，∴PD⊥AB.

又 DE⊥平面 PAB，∴DE⊥AB. ∴AB⊥平面 PDE. …3分

又 PG⊂平面 PDE，∴AB⊥PG. 依题 PA=PB，∴G是 AB的中点. … 6分

(Ⅱ)解：在平面 PAB内作 EF⊥PA（或 EF// PB）垂足为 F，

则 F是点 E在平面 PAC内的正投影 . …7分

理由如下：∵ PC⊥PA，PC⊥PB，∴ PC⊥平面 PAB. ∴EF ⊥PC

作 EF⊥PA，∴EF⊥平面 PAC. 即 F是点 E在平面 PAC内的正投影 .…9分

连接 CG，依题 D是正 ΔABC的重心，∴ D在中线 CG上，且 CD=2DG.

易知 DE// PC，PC=PB=PA= 6，∴DE=2，$PE=\frac{2}{3}PG=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

则在等腰直角 ΔPEF中，PF=EF= 2，∴ ΔPEF的面积 S=2.

所以四面体 PDEF的体积 $V=\frac{1}{3}S\times DE=\frac{4}{3}$. …12分

19. 解：(Ⅰ)当 $x\le 19$时，y=3800；当 x>19时，y=3800+500(x-19)=500x-5700.

所以 y与 x的函数解析式为 $y=\begin{cases}3800, & x\le 19\\ 500x-5700, & x>19\end{cases}(x\in N^*)$ …3分

(Ⅱ)由柱状图知，需更换的易损零件数不大于 18为 0.46，不大于 19为 0.7，所以 n的最小值为 19. …6分

(Ⅲ)若每台机器都购买 19个易损零件，则有 70台的费用为 3800，20台的费用为 4300，10台的费用为 4800，所以 100台机器购买易损零件费用的

平均数为 $\frac{1}{100}(3800\times 70+4300\times 20+4800\times 10)=4000$. …9分

若每台机器都购买 20个易损零件，则有 90台的费用为 4000，10台的费用为 4500，所以 100台机器购买易损零件费用的

平均数为 $\frac{1}{100}(4000\times 90+4500\times 10)=4050$. …11 分

比较两个平均数可知，购买 1 台机器的同时应购买 19 个易损零件 .…12 分

20. 解：(Ⅰ)依题 $M(0,t)$, $P(\frac{t^2}{2p},t)$. 所以 $N(\frac{t^2}{p},t)$, ON 的方程为 $y=\frac{p}{t}x$.

联立 $y^2=2px$, 消去 x 整理得 $y^2=2ty$. 解得 $y_1=0$, $y_2=2t$. …4 分

所以 $H(\frac{2t^2}{p},2t)$. 所以 N 是 OH 的中点，所以 $\frac{|OH|}{|ON|}=2$. …6 分

(Ⅱ)直线 MH 的方程为 $y-t=\frac{p}{2t}x$，联立 $y^2=2px$, 消去 x 整理得 $y^2-4ty+4t^2=0$.

解得 $y_1=y_2=2t$. 即直线 MH 与 C 只有一个交点 H.

所以除 H 以外，直线 MH 与 C 没有其它公共点 . …12 分

21. 解：(Ⅰ) $f'(x)=(x-1)e^x+a(2x-2)=(x-1)(e^x+2a)$. $x\in R$ …2 分

(1)当 $a\ge 0$ 时，在 $(-\infty,1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

在$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增 . …3 分

(2)当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

①若 $a=-\frac{e}{2}$，$\ln(-2a)=1$，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增 .

②若 $a>-\frac{e}{2}$，$\ln(-2a)<1$，在$(\ln(-2a),1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

在$(-\infty,\ln(-2a))$与$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增 .

③若 $a<-\frac{e}{2}$，$\ln(-2a)>1$，在$(1,\ln(-2a))$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

在$(-\infty,1)$与$(\ln(-2a),+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增 .…7 分

(Ⅱ) (1)当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$ 只有一个零点，不合要求 . …8 分

(2)当 $a>0$ 时，由(Ⅰ)知 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减；在 $(1,+\infty)$上单调递增 .

最小值 $f(1)=-e<0$，又 $f(2)=a>0$，若取 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$，$e^b<\frac{a}{2}$.

从而 $f(b)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a(b^2-\frac{3}{2}b)>0$，所以 $f(x)$有两个零点 . …10 分

(3)当 $a<0$ 时，在$(-\infty,1]$上，$f(x)<0$ 恒成立；若 $a\ge -\frac{e}{2}$，由(Ⅰ)知 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，不存在两个零点 .若 $a<-\frac{e}{2}$，$f(x)$在$(1,\ln(-2a))$上单调递减；在$(\ln(-2a),+\infty)$上单调递增，也不存在两个零点 .

综上 a 的取值范围是 $(0,1)$. …12 分

2016年全国高考新课标 1卷文科数学试 题参考答案

第Ⅰ卷

一、选择题，本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|2\le x\le 5\}$，则 $A\cap B=$(　　)B

A．{1,3}　　B．{3,5}　　C．{5,7}　　D．{1,7}

2. 设(1+2i)(a+i)的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 a=(　　) A

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

3. 为美化环境，从红、黄、白、紫 4种颜色的花中任选 2种花种在一个花坛中，余下的 2种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是(　　) C

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

4. ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $a=\sqrt{5}, c=2, \cos A=\frac{2}{3}$，则 b=(　　)D

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

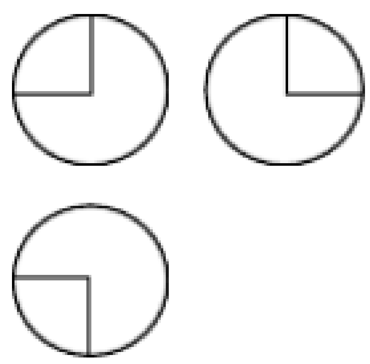
5. 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为 (　　)B

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

6. 若将函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后，所得图像对应的函数为(　　) D

A．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　B．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　C．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$　D．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

7. 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径．若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是 (　　) A

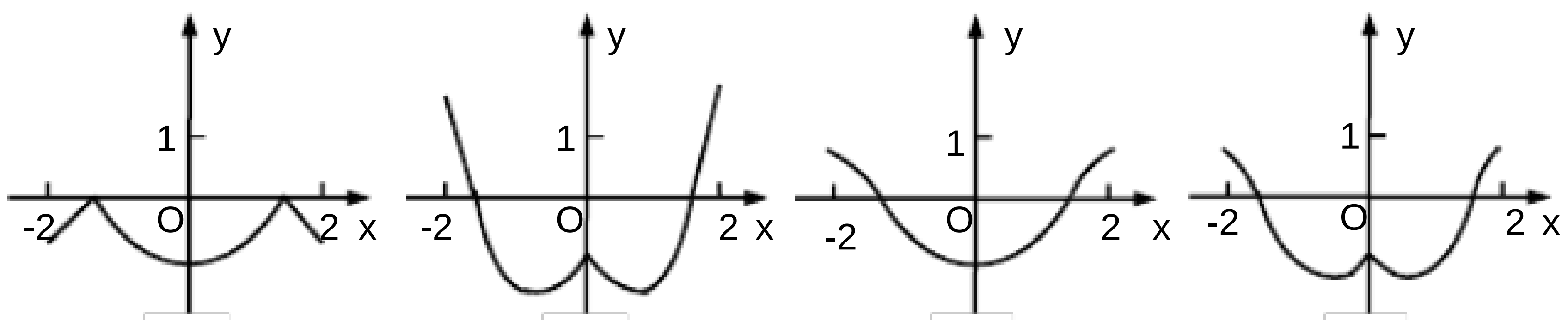


A．17π　　B．18π　　C．20π　　D．28π

8. 若 a>b>0，0<c<1，则(　　)B

A．$\log_a c<\log_b c$　　B．$\log_c a<\log_c b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$c^a>c^b$

9. 函数 $y=2x^2-e^{|x|}$在[-2,2]的图像大致为 (　　)D

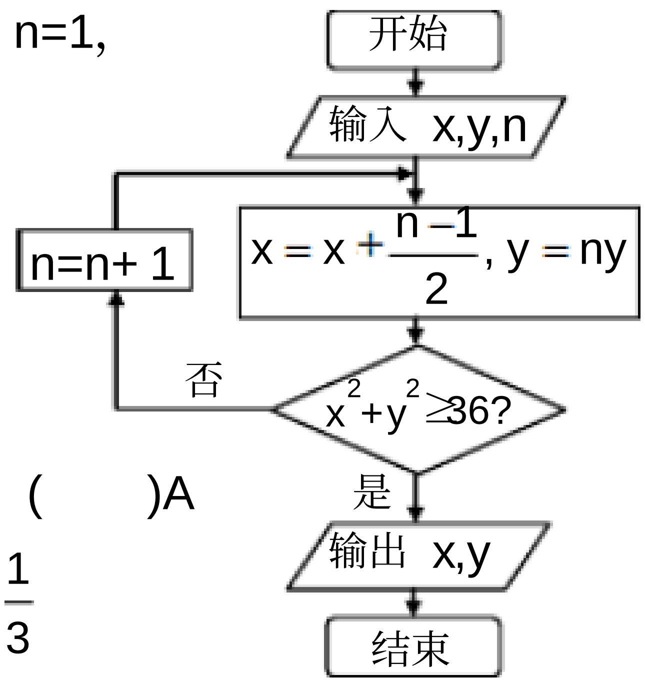


A　　B　　C　　D

10. 执行右面的程序框图，如果输入的 $x=0$，$y=1$，$n=1$，则输出 x，y 的值满足 (　　)C

A．$y=2x$　　　　B．$y=3x$

C．$y=4x$　　　　D．$y=5x$



11. 平面 α 过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，α//平面 CB_1D_1，$\alpha\cap$平面 $ABCD=m$，$\alpha\cap$平面 $ABB_1A_1=n$，则 m，n 所成角的正弦值为 (　　)A

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

12. 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是 (　　)C

A．$[-1,1]$　　B．$[-1,\frac{1}{3}]$　　C．$[-,\frac{1}{3}]$　　D．$[-1,-\frac{1}{3}]$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分．第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22 题~第 24 题为选考题，考生根据要求作答．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在横线上．

13. 设向量 $\mathbf{a}=(x,\ x+1)$，$\mathbf{b}=(1,\ 2)$，且 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，则 $x=$______．$-\frac{2}{3}$

14. 已知 θ 是第四象限角，且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$________．$-\frac{4}{3}$

15. 设直线 $y=x+2a$ 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为 ________.4π

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元.该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为____________元.216000

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．只做 6 题，共 70 分.

17.（本题满分 12 分）

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；　　(Ⅱ)求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

解：(Ⅰ)依题 $a_1b_2+b_2=b_1$，$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，解得 $a_1=2$　　…2 分

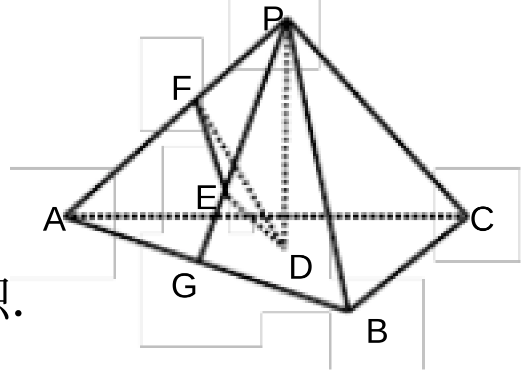
通项公式为　$a_n=2+3(n-1)=3n-1$　　…6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $3nb_{n+1}=nb_n$，$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$，所以$\{b_n\}$是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列 .…9 分

所以$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ …12 分

18.（本题满分 12 分）

如图，已知正三棱锥 P-ABC 的侧面是直角三角形，PA=6，顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于点 G.



(Ⅰ)证明 G 是 AB 的中点；

(Ⅱ)在答题卡第（18）题图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F(说明作法及理由)，并求四面体 PDEF 的体积.

(Ⅰ)证明：PD⊥平面 ABC，∴PD⊥AB.

又 DE⊥平面 PAB，∴DE⊥AB. ∴AB⊥平面 PDE. …3 分

又 PG⊂平面 PDE，∴AB⊥PG. 依题 PA=PB，∴G 是 AB 的中点. … 6 分

(Ⅱ)解：在平面 PAB 内作 EF⊥PA（或 EF// PB）垂足为 F，

则 F 是点 E 在平面 PAC 内的正投影 . …7 分

理由如下：∵ PC⊥PA，PC⊥PB，∴ PC⊥平面 PAB. ∴EF ⊥PC

作 EF⊥PA，∴EF⊥平面 PAC. 即 F 是点 E 在平面 PAC 内的正投影 .…9 分

连接 CG，依题 D 是正 ΔABC 的重心，∴ D 在中线 CG 上，且 CD=2DG.

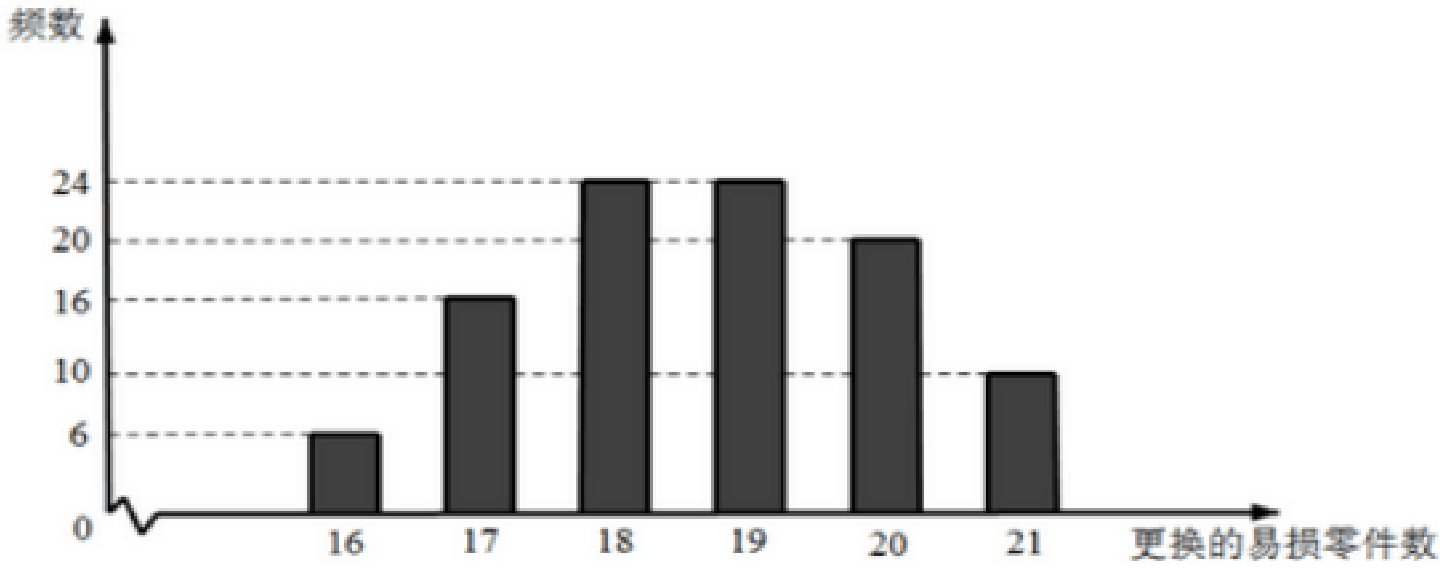
易知 DE// PC，PC=PB=PA= 6，∴DE=2，$PE=\frac{2}{3}PG=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

则在等腰直角 ΔPEF 中，PF=EF= 2，∴ ΔPEF 的面积 S=2.

所以四面体 PDEF 的体积 $V=\frac{1}{3}S\times DE=\frac{4}{3}$. …12 分

19.（本小题满分 12 分）

某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰 . 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元.现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



记 x 表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数，y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元），n 表示购机的同时购买的易损零件数.

(Ⅰ)若 $n=19$，求 y 与 x 的函数解析式；

(Ⅱ)若要求“需更换的易损零件数不大于 n”的频率不小于 0.5，求 n 的最小值；

(Ⅲ)假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件，或每台都购买 20 个易损零件，分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数，以此作为决策依据，购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件？

解：(Ⅰ)当 $x\le19$ 时，$y=3800$；当 $x>19$ 时，$y=3800+500(x-19)=500x-5700$.

所以 y 与 x 的函数解析式为 $y=\begin{cases}3800, & x\le19\\ 500x-5700, & x>19\end{cases}(x\in N^*)$ …3 分

(Ⅱ)由柱状图知，需更换的易损零件数不大于 18 为 0.46，不大于 19 为 0.7，所以 n 的最小值为 19. …6 分

(Ⅲ)若每台机器都购买 19 个易损零件，则有 70 台的费用为 3800，20 台的费用为 4300，10 台的费用为 4800，所以 100 台机器购买易损零件费用的

平均数为 $\frac{1}{100}(3800\times70+4300\times20+4800\times10)=4000$. …9 分

若每台机器都购买 20 个易损零件，则有 90 台的费用为 4000，10 台的费用为 4500，所以 100 台机器购买易损零件费用的

平均数为 $\frac{1}{100}(4000\times90+4500\times10)=4050$. …11 分

比较两个平均数可知，购买 1 台机器的同时应购买 19 个易损零件. …12 分

20.（本小题满分 12 分）

在直角坐标系 xoy 中，直线 $l:y=t(t\neq0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连结 ON 并延长交 C 于点 H.

(Ⅰ)求 $\frac{|OH|}{|ON|}$；(Ⅱ)除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由.

解：(Ⅰ)依题 $M(0,t)$，$P(\frac{t^2}{2p},t)$. 所以 $N(\frac{t^2}{p},t)$，ON 的方程为 $y=\frac{p}{t}x$.

联立 $y^2=2px$，消去 x 整理得 $y^2=2ty$. 解得 $y_1=0$，$y_2=2t$. …4 分

所以 $H(\frac{2t^2}{p},2t)$. 所以 N 是 OH 的中点，所以 $\frac{|OH|}{|ON|}=2$. …6 分

(Ⅱ)直线 MH 的方程为 $y-t=\frac{p}{2t}x$，联立 $y^2=2px$，消去 x 整理得 $y^2-4ty+4t^2=0$.

解得 $y_1=y_2=2t$. 即直线 MH 与 C 只有一个交点 H.

所以除 H 以外，直线 MH 与 C 没有其它公共点. …12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$.

(Ⅰ)讨论 f(x)的单调性； (Ⅱ)若有两个零点，求 a 的取值范围 .

解：(Ⅰ) $f'(x)=(x-1)e^x+a(2x-2)=(x-1)(e^x+2a)$. $x\in R$ …2 分

(1)当 $a\ge 0$ 时，在 $(-\infty,1)$上，$f'(x)<0$，f(x)单调递减；

在 $(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，f(x)单调递增 . …3 分

(2)当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

①若 $a=-\frac{e}{2}$，$\ln(-2a)=1$，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，所以 f(x)在$(-\infty,+\infty)$上单调递增 .

②若 $a>-\frac{e}{2}$，$\ln(-2a)<1$，在 $(\ln(-2a),1)$上，$f'(x)<0$，f(x)单调递减；

在$(-\infty,\ln(-2a))$与$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，f(x)单调递增 .

③若 $a<-\frac{e}{2}$，$\ln(-2a)>1$，在 $(1,\ln(-2a))$上，$f'(x)<0$，f(x)单调递减；

在$(-\infty,1)$与$(\ln(-2a),+\infty)$上，$f'(x)>0$，f(x)单调递增 .…7 分

(Ⅱ) (1)当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^x$ 只有一个零点，不合要求 . …8 分

(2)当 $a>0$ 时，由(Ⅰ)知 f(x)在$(-\infty,1)$上单调递减；在 $(1,+\infty)$上单调递增 .

最小值 $f(1)=-e<0$，又 $f(2)=a>0$，若取 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$，$e^b<\frac{a}{2}$.

从而 $f(b)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a(b^2-\frac{3}{2}b)>0$，所以 f(x)有两个零点 . …10 分

(3)当 $a<0$ 时，在 $(-\infty,1]$上，$f(x)<0$ 恒成立；若 $a\ge-\frac{e}{2}$，由(Ⅰ)知 f(x)在$(1,+\infty)$上单调递增，不存在两个零点 .若 $a<-\frac{e}{2}$，f(x)在$(1,\ln(-2a))$上单调递减；在$(\ln(-2a),+\infty)$上单调递增，也不存在两个零点 .

综上 a 的取值范围是 (0,1). …12 分

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲

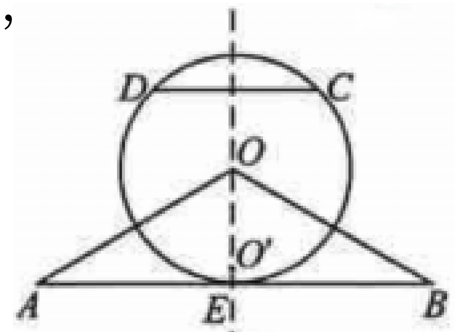
如图，ΔOAB 是等腰三角形，$\angle AOB=120°$. 以 O 为圆心，$\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆 .

(Ⅰ)证明：直线 AB 与⊙O 相切；

(Ⅱ)点 C,D 在⊙O 上，且 A,B,C,D 四点共圆，证明：AB∥CD.

证明：(Ⅰ)设 E 是 AB 的中点，连接 OE，因为 OA=OB，$\angle AOB=120°$. 所以 $OE\perp AB$，$\angle AOE=60°$. …3 分

在 RtΔAOE 中，$OE=\frac{1}{2}OA$. 即圆心 O 到直线 AB 的距离等打半径，所以直线 AB 与⊙O 相切 . …5 分



(Ⅱ)因为 OD=$\frac{1}{2}$OA，所以 O 不是 A,B,C,D 四点共圆的圆心，故设其圆心为 O'，则 O'在 AB 的垂直平分线上．

又 O 在 AB 的垂直平分线上，作直线 O O'，所以 O O'⊥AB.⋯8 分

同理可证 O O'⊥CD.所以 AB∥CD.　　⋯10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直线坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = 1 + a\sin t \end{cases}$（t 为参数，a>0）．在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=4\cos\theta$

(Ⅰ)说明 C_1 是哪种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

(Ⅱ)直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a.

解：(Ⅰ)消去参数 t 得到 C_1 的普通方程 $x^2+(y-1)^2=a^2$.

所以 C_1 是以(0,1)为圆心 a 为半径的圆．　⋯3 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入可得 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$.　⋯5 分

(Ⅱ)联立 $\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$ 与 $\rho=4\cos\theta$ 消去 ρ 得 $16\cos^2\theta-8\sin\theta\cos\theta+1-a^2=0$,

由 $\tan\theta=2$ 可得 $16\cos^2\theta-8\sin\theta\cos\theta=0$. 从而 $1-a^2=0$，解得 a=1.　⋯8 分

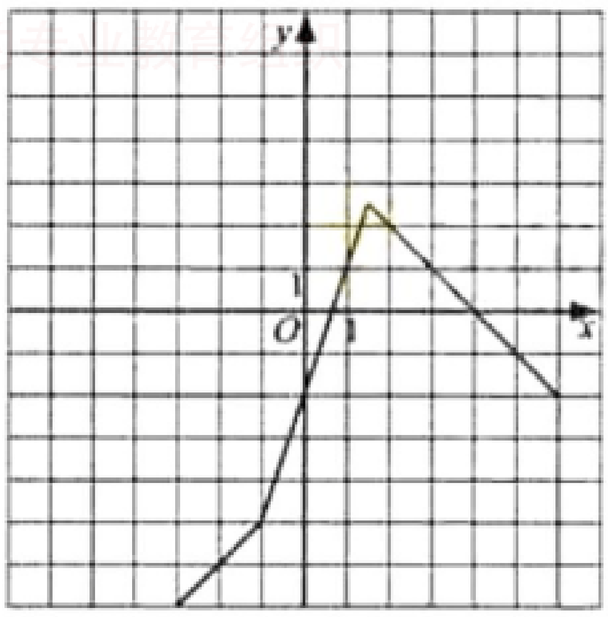
当 a=1 时，极点也是 C_1 与 C_2 的公共点，且在 C_3 上，综上 a=1.　⋯10 分

24.（本小题满分 10 分），选修 4—5：不等式选讲

已知函数 f(x)=| x+1| -|2x-3|.

(Ⅰ)在答题卡第 24 题图中画出 y=f(x)的图像；

(Ⅱ)求不等式 | f(x)|>1 的解集．



解：(Ⅰ) $f(x)=\begin{cases} x-4, & x<-1 \\ 3x-2, & -1\le x<\frac{3}{2} \\ -x+4, & x\ge\frac{3}{2} \end{cases}$

y=f(x)的图像如图所示．　⋯5 分

(Ⅱ)由 f(x)的图像和表达式知，当 f(x)=1 时，解得 x=1 或 x=3.

当 f(x)=-1 时，解得 x=$\frac{1}{3}$或 x=5.　⋯8 分

结合 f(x)的图像可得 | f(x)|>1 的解集为 {x|x<$\frac{1}{3}$或 1< x<3 或 x>5}.　⋯10 分

小题详解

一、选择题，本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 A={1,3,5,7}，B={x|2 ≤x≤ 5} 则 A∩B=(　　)B

A．{1,3}　　B．{3,5}　　C．{5,7}　　D．{1,7}

解：取 A，B 中共有的元素是 {3,5}，故选 B

2．设(1+2i)(a+i)的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 a=(　　) A

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

解：(1+2i)(a+i)= a-2+(1+2a)i，依题 a-2=1+2a，解得 a=-3，故选 A

3．为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是(　　) C

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

解：设红、黄、白、紫 4 种颜色的花分别用 1,2,3,4 来表示，则所有基本事件有 (12,34)，(13,24)，(14,23)，(23,14)，(24,13)，(34,12)，共 6 个，其中 1 和 4 不在同一花坛的事件有 4 个，其概率为 P=$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，故选 C

4．ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $a=\sqrt{5}, c=2, \cos A=\frac{2}{3}$，则 b=(　　)D

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

解：由余弦定理得：$5=4+b^2-4b\times\frac{2}{3}$，则 $3b^2-8b-3=0$，解得 b=3，故选 D

5．直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为 (　　)B

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

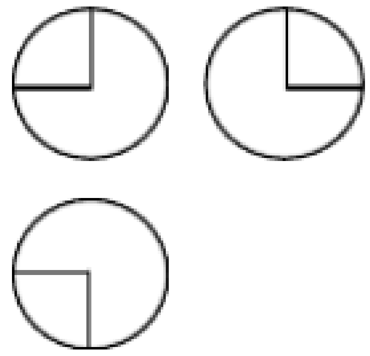
解：由直角三角形的面积关系得 $bc=\frac{1}{4}\times 2b\sqrt{b^2+c^2}$，解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，故选 B

6．若将函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后，所得图像对应的函数为(　　) D

A．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　B．$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　C．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$　D．$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

解：对应的函数为 $y=2\sin[2(x-\frac{1}{4}\times\pi)+\frac{\pi}{6}]$，即 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，故选 D

7. 如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径 .若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（ ）A



A．17π　　B．18π　　C．20π　　D．28π

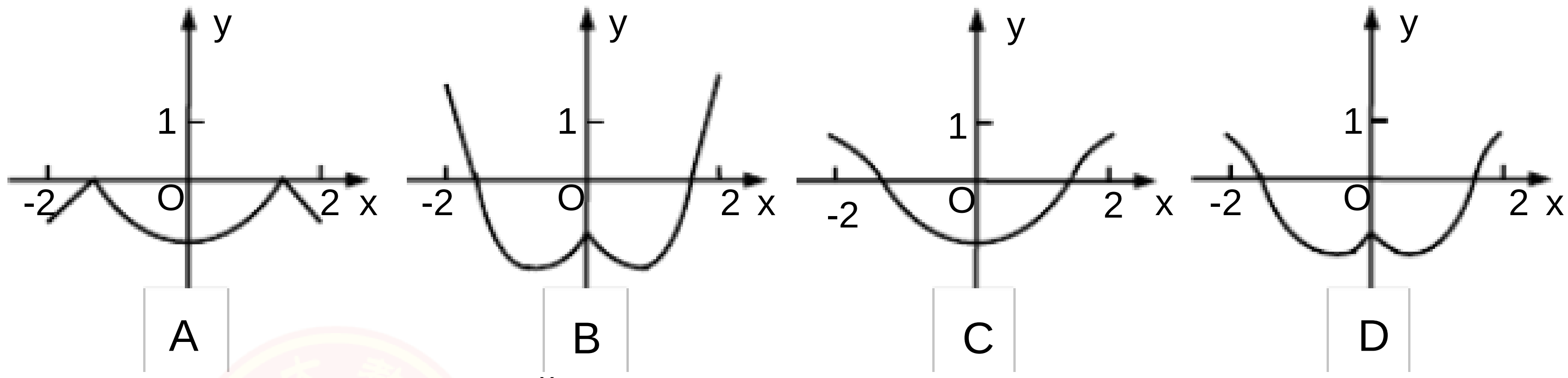
解：依图可知该几何体是球构成截去了八分之一，其体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3\times\frac{7}{8}=\frac{28\pi}{3}$，解得 R=2，表面积 $S=4\pi\times2^2\times\frac{7}{8}+\frac{3}{4}\pi\times2^2=17\pi$，故选 B

8. 若 a>b>0，0<c<1，则（ ）B

A．$\log_a c<\log_b c$　　B．$\log_c a<\log_c b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$c^a>c^b$

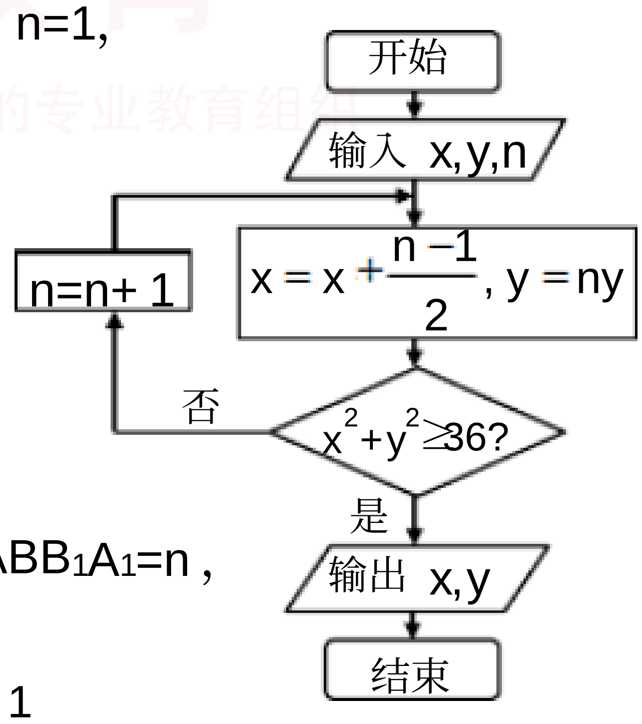
解：取特值 a=1，b=0.5，c=0.5，可排除 A，C，D，故选 B

9. 函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在[-2,2]的图像大致为（ ）D



解：当 $0\le x\le 2$ 时，$y'=4x-e^x$，函数先减后增，且 $y'|_{x=0.5}>0$，最小值在 (0,0.5)内．故选 D

10. 执行右面的程序框图，如果输入的 x=0，y=1，n=1，则输出 x，y 的值满足（ ）C



A．y=2x　　B．y=3x

C．y=4x　　D．y=5x

解：运行程序，循环节内的 n，x，y 依次为 (1,0,1)，(2,0.5,2)，(3,1.5,6)，输出 x=1.5，y=6，故选 C

11. 平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，α// 平面 CB_1D_1，α∩平面 ABCD=m，α∩平面 $ABB_1A_1=n$，则 m，n 所成角的正弦值为（ ）A

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

解：平面 $A_1B_1C_1D_1$∩平面 $CB_1D_1=B_1D_1$ 与 m 平行，平面 CDD_1C_1∩平面 $CB_1D_1=CD_1$ 与 n 平行，所以 m，n 所成角就是 B_1D_1 与 CD_1 所成角，而 ΔCB_1D_1 是等边三角形，则所成角是 60°，故选 A

12. 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是（ ）C

A．[-1,1]　　B．$[-1,\frac{1}{3}]$　　C．$[-,\frac{1}{3}]$　　D．$[-1,-\frac{1}{3}]$

解：∵ $f(x)=x-\frac{2}{3}\sin x\cos x+a\sin x$，∴ $f'(x)=1-\frac{2}{3}(\cos^2x-\sin^2x)+a\cos x$，

依题 $f'(x)\geq0$ 恒成立，即 $a\cos x\geq\frac{2}{3}\cos2x-1$ 恒成立，而 $(a\cos x)_{min}=-|a|$，

$\frac{2}{3}\cos2x-1\leq-\frac{1}{3}$，∴ $-|a|\geq-\frac{1}{3}$，解得 $a\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$，故选 C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在横线上．

13. 设向量 **a**=(x, x+1)，**b**=(1, 2)，且 **a**⊥**b**，则 x=______．$-\frac{2}{3}$

解：依题 x+2(x+1)=0，解得 $x=-\frac{2}{3}$

14. 已知 θ是第四象限角，且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$=_______．$-\frac{4}{3}$

解：依题 $\theta+\frac{\pi}{4}$是第一象限角，$\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{4}{5}$，$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=-\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)$

$=-\tan[\frac{\pi}{2}-(\theta+\frac{\pi}{4})]=-\sin[\frac{\pi}{2}-(\theta+\frac{\pi}{4})]/\cos[\frac{\pi}{2}-(\theta+\frac{\pi}{4})]=-\cos(\theta+\frac{\pi}{4})/\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{4}{3}$

15. 设直线 y=x+2a 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积为 ________.4π

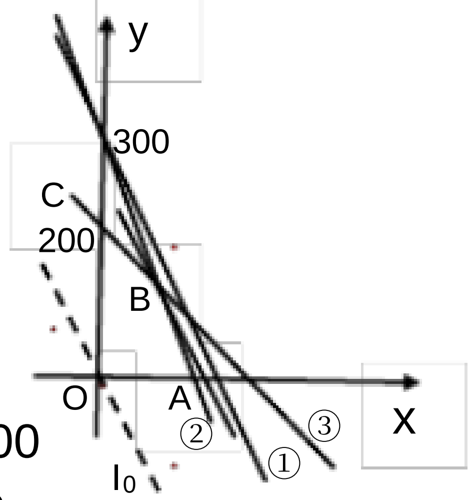
解：圆方程可化为 $x^2+(y-a)^2=a^2+2$，圆心 C 到直线距离 $d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$，由 $d^2+3=a^2+2$，

解得 $a^2=2$，所以圆半径为 2，则圆面积为 4π

16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元.该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为___________元.216000

解：设生产 A、B 两种产品各 x 件、y 件，利润之和是 z=2100x+900y，

约束条件是 $\begin{cases}1.5x+0.5y\leq150\\x+0.3y\leq90\\5x+3y\leq600\\x\geq0,y\geq0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3x+y\leq300\\10x+3y\leq900\\5x+3y\leq600\\x\geq0,y\geq0\end{cases}$



作出可行域四边形 OABC，如图．

画出直线 l_0：7x+3y=0，平移 l_0 到 l，

当 l 经过点 B 时 z 最大，联立 10x+3y=900 与 5x+3y=600

解得交点 B(60,100)，所以 z_{max}=126000+90000=216000.