绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试题类型：A

2016 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设集合 $A=\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$ ， $B=\{x\,|\,2x-3>0\}$ ，则 $A\cap B=$（　　）

（A） $(-3,-\frac{3}{2})$　　（B） $(-3,\frac{3}{2})$　　（C） $(1,\frac{3}{2})$　　（D） $(\frac{3}{2},3)$

（2）设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$ ，其中 x，y 是实数，则 $|x+y\mathrm{i}|=$（　　）

（A）1　　（B） $\sqrt{2}$　　（C） $\sqrt{3}$　　（D）2

（3）已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27， $a_{10}=8$ ，则 $a_{100}=$（　　）

（A）100　　（B）99　　（C）98　　（D）97

（4）某公司的班车在 7:00，8:00，8:30 发车，小明在 7:50 至 8:30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 10 分钟的概率是（　　）

（A） $\frac{1}{3}$　　（B） $\frac{1}{2}$　　（C） $\frac{2}{3}$　　（D） $\frac{3}{4}$

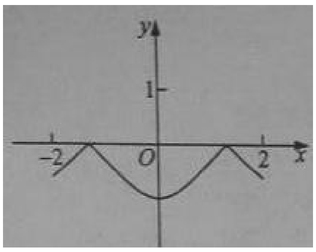
（5）已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{m^2-n}=1$ 表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为 4，则 n 的取值范围是（　　）

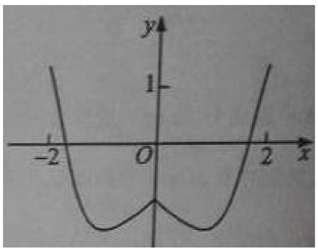
（A） $(-1,3)$　　（B） $(-1,\sqrt{3})$　　（C） $(0,3)$　　（D） $(0,\sqrt{3})$

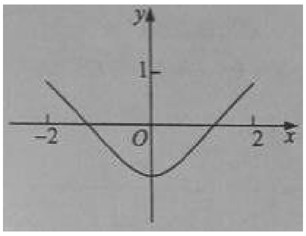
（6）如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径.若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　　）

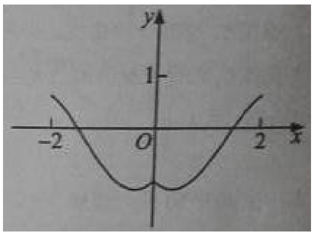
（A） 17π　　（B） 18π　　（C） 20π　　（D） 28π

（7）函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为（　　）

（A） 

（B） 

（C）

（D）

（8）若 $a>b>1,0<c<1$，则（　　）

（A）$a^c<b^c$　　（B）$ab^c<ba^c$　　（C）$a\log_b c<b\log_a c$　　（D）$\log_a c<\log_b c$

（9）执行右面的程序图，如果输入的 $x=0$，$y=1$，$n=1$，

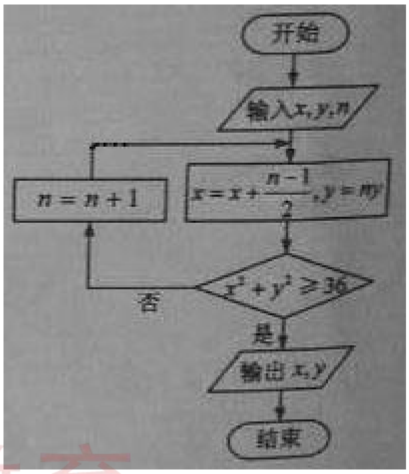
则输出 x，y 的值满足（　　）

（A）$y=2x$

（B）$y=3x$

（C）$y=4x$

（D）$y=5x$



（10）以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A、B 两点，交 C 的标准线于 D、E 两点.已知$|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，

则 C 的焦点到准线的距离为（　　）

(A)2　　(B)4　　(C)6　　(D)8

（11）平面 a 过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，a//平面 CB_1D_1，$a\cap$平面 $ABCD=m$，$a\cap$平面 $ABA_1B_1=n$，

则 m、n 所成角的正弦值为（　　）

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(B)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D)$\dfrac{1}{3}$

（12）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}),x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图像的对称轴，

且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为（　　）

（A）11　　（B）9　　（C）7　　（D）5

二、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分

（13）设向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则 $m=$_________.

（14）$(2x+\sqrt{x})^5$的展开式中，x^3的系数是________.（用数字填写答案）

（15）设等比数列满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\ldots a_n$ 的最大值为________.

（16）某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料。生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时，生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元。该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为元________.

三.解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分为 12 分）

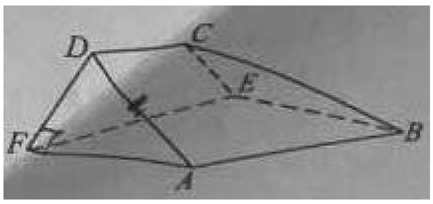
$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别别为 a，b，c，已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c.$

（I）求 C；

（II）若 $c=\sqrt{7}$,$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$的周长.

（18）（本题满分为 12 分）

如图，在已 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，AF=2FD，$\angle AFD=90^\circ$，且二面角 D-AF-E 与二面角 C-BE-F 都是60°.

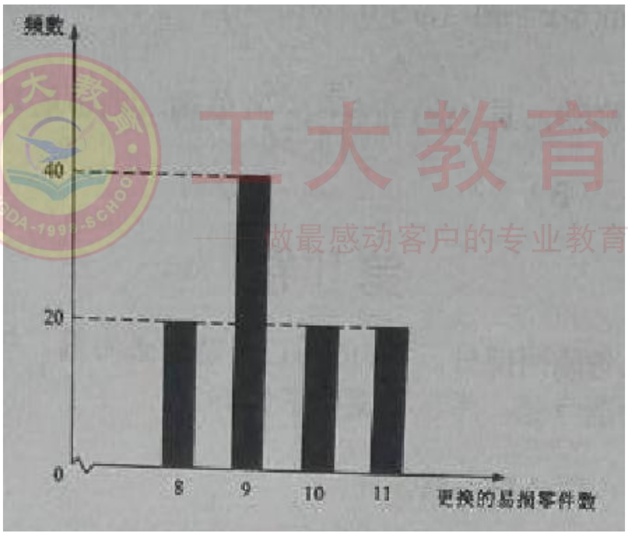


（I）证明平面 $ABEF\perp$平面 $EFDC$；

（II）求二面角 E-BC-A 的余弦值.

（19）（本小题满分 12 分）

某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰.机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元.在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元.现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

（I）求 X 的分布列;

（II）若要求 $P(X \le n) \ge 0.5$，确定 n 的最小值;

（III）以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

（20）（本小题满分 12 分）

设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 B（1,0）且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C，D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

（I）证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

（II）设点 E 的轨迹为曲线 C_1，直线 l 交 C_1 于 M, N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P, Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

（21）（本小题满分 12 分）

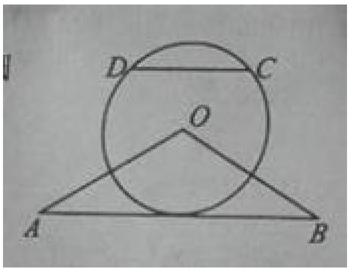
已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

（I）求 a 的取值范围；

（II）设 x_1，x_2 是的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

请考生在 22、23、24 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分,做答时请写清题号。

（22）（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲



如图，$\triangle OAB$ 是等腰三角形，$\angle AOB=120°$.以 O 为圆心，$\frac{1}{2}OA$ 为半径作圆.

（I）证明：直线 AB 与⊙O 相切；

（II）点 C,D 在⊙O 上，且 A,B,C,D 四点共圆，证明：$AB \parallel CD$.

（23）（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直线坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=1+a\sin t \end{cases}$ （t 为参数，$a>0$）。

在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=4\cos\theta$.

（I）说明 C_1 是哪一种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

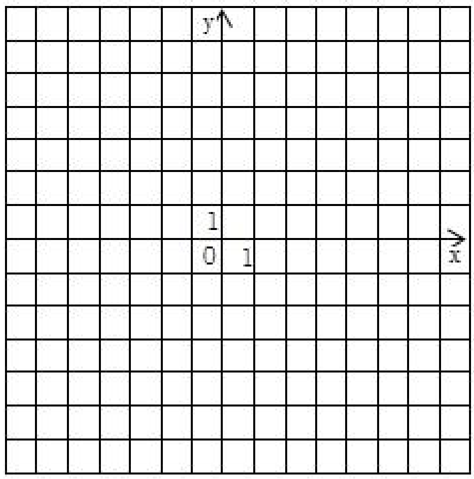
（II）直线 C_3 的极坐标方程为$\theta=\alpha_0$，其中满足 $\tan\alpha_0=2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求α。

（24）（本小题满分 10 分），选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.

（I）在答题卡第（24）题图中画出 $y=f(x)$的图像；

（II）求不等式$|f(x)|>1$ 的解集。



参考版解析

1. $A=\left\{x\left|x^2-4x+3<0\right.\right\}=\left\{x\left|1<x<3\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|2x-3>0\right.\right\}=\left\{x\left|x>\frac{3}{2}\right.\right\}$.

故 $A\cap B=\left\{x\left|\frac{3}{2}<x<3\right.\right\}$.

故选 D.

2. 由$(1+i)x=1+yi$ 可知：$x+xi=1+yi$，故$\begin{cases}x=1\\x=y\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

所以，$|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$.

故选 B.

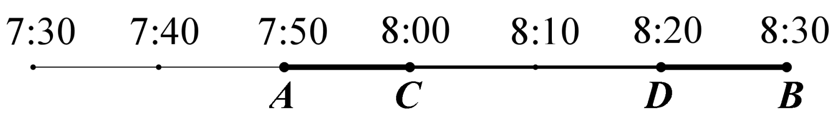
3. 由等差数列性质可知：$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times 2a_5}{2}=9a_5=27$，故 $a_5=3$，

而 $a_{10}=8$，因此公差 $d=\frac{a_{10}-a_5}{10-5}=1$

$\therefore a_{100}=a_{10}+90d=98$.

故选 C.

4. 如图所示，画出时间轴：



小明到达的时间会随机的落在图中线段 AB 中，而当他的到达时间落在线段 AC 或 DB 时，才能保证他等

车的时间不超过 10 分钟

根据几何概型，所求概率 $P=\frac{10+10}{40}=\frac{1}{2}$.

故选 B.

5. $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线，则 $\left(m^2+n\right)\left(3m^2-n\right)>0$

$\therefore -m^2<n<3m^2$

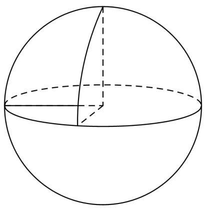
由双曲线性质知：$c^2=\left(m^2+n\right)+\left(3m^2-n\right)=4m^2$，其中 c 是半焦距

$\therefore$焦距 $2c=2\cdot 2|m|=4$，解得 $|m|=1$

$\therefore -1<n<3$

故选 A.

6. 原立体图如图所示：



是一个球被切掉左上角的 $\frac{1}{8}$ 后的三视图

表面积是 $\frac{7}{8}$ 的球面面积和三个扇形面积之和

$S=\frac{7}{8}\times 4\pi\times 2^2+3\times\frac{1}{4}\pi\times 2^2=17\pi$

故选 A.

7. $f(2)=8-e^2>8-2.8^2>0$，排除 A

$f(2)=8-e^2<8-2.7^2<1$，排除 B

$x>0$ 时，$f(x)=2x^2-e^x$ $f'(x)=4x-e^x$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 时，$f'(x)<\frac{1}{4}\times 4-e^0=0$

因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递减，排除 C

故选 D.

8. 对 A： 由于 $0<c<1$，$\therefore$函数 $y=x^c$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因此 $a>b>1\Leftrightarrow a^c>b^c$，A 错误

对 B： 由于 $-1<c-1<0$，$\therefore$ 函数 $y=x^{c-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore a>b>1 \Leftrightarrow a^{c-1}<b^{c-1} \Leftrightarrow ba^{c}<ab^{c}$，B 错误

对 C： 要比较 $a\log_{b}c$ 和 $b\log_{a}c$，只需比较 $\dfrac{a\ln c}{\ln b}$ 和 $\dfrac{b\ln c}{\ln a}$，只需比较 $\dfrac{\ln c}{b\ln b}$ 和 $\dfrac{\ln c}{a\ln a}$，只需 $b\ln b$ 和 $a\ln a$

构造函数 $f(x)=x\ln x(x>1)$，则 $f'(x)=\ln x+1>1>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，因此

$f(a)>f(b)>0 \Leftrightarrow a\ln a>b\ln b>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a\ln a}<\dfrac{1}{b\ln b}$

又由 $0<c<1$ 得 $\ln c<0$，$\therefore \dfrac{\ln c}{a\ln a}<\dfrac{\ln c}{b\ln b} \Leftrightarrow b\log_{a}c<a\log_{b}c$，C 正确

对 D： 要比较 $\log_{a}c$ 和 $\log_{b}c$，只需比较 $\dfrac{\ln c}{\ln a}$ 和 $\dfrac{\ln c}{\ln b}$

而函数 $y=\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $a>b>1 \Leftrightarrow \ln a>\ln b>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln a}<\dfrac{1}{\ln b}$

又由 $0<c<1$ 得 $\ln c<0$，$\therefore \dfrac{\ln c}{\ln a}>\dfrac{\ln c}{\ln b} \Leftrightarrow \log_{a}c>\log_{b}c$，D 错误

故选 C.

9． 如下表：

循环节运行次数	$x\left(x=x+\dfrac{n-1}{2}\right)$	$y(y=ny)$	判断 $x^2+y^2\geq 36$	是否输出	$n(n=n+1)$
运行前	0	1	/	/	1
第一次	0	1	否	否	2
第二次	$\dfrac{1}{2}$	2	否	否	3
第三次	$\dfrac{3}{2}$	6	是	是	

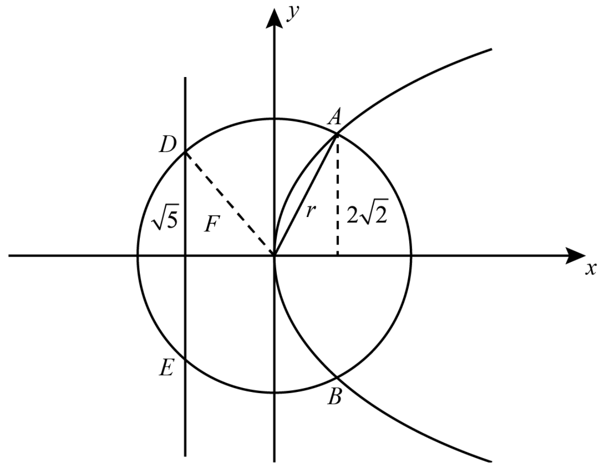
输出 $x=\dfrac{3}{2}$， $y=6$，满足 $y=4x$

故选 C.

10． 以开口向右的抛物线为例来解答，其他开口同理

设抛物线为 $y^2=2px\ (p>0)$，设圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，

题目条件翻译如图：



设 $A\left(x_0,2\sqrt{2}\right)$， $D\left(-\dfrac{p}{2},\sqrt{5}\right)$，

点 $A\left(x_0,2\sqrt{2}\right)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，$\therefore 8=2px_0$ ……①

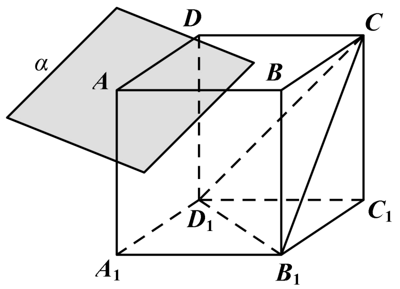
点 $D\left(-\dfrac{p}{2},\sqrt{5}\right)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上，$\therefore 5+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=r^2$ ……②

点 $A\left(x_0,2\sqrt{2}\right)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上，$\therefore x_0^2+8=r^2$ ……③

联立①②③解得： $p=4$，焦点到准线的距离为 $p=4$．

故选 B．

11．如图所示：



$\because \alpha //$ 平面 CB_1D_1，$\therefore$ 若设平面 $CB_1D_1 \cap$ 平面 $ABCD=m_1$，则 $m_1 // m$

又 $\because$ 平面 $ABCD //$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，结合平面 $B_1D_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=B_1D_1$

$\therefore B_1D_1 // m_1$，故 $B_1D_1 // m$

同理可得：$CD_1 // n$

故 m、n 的所成角的大小与 B_1D_1、CD_1 所成角的大小相等，即 $\angle CD_1B_1$ 的大小．

而 $B_1C=B_1D_1=CD_1$（均为面对交线），因此 $\angle CD_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$，即 $\sin\angle CD_1B_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

12．由题意知：

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi\\ \dfrac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

则 $\omega=2k+1$，其中 $k\in\mathbf{Z}$

$\because f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，$\therefore \dfrac{5\pi}{36}-\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{\pi}{12}\le\dfrac{T}{2},\omega\le 12$

接下来用排除法

若 $\omega=11,\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=\sin\left(11x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{3\pi}{44}\right)$ 递增，在 $\left(\dfrac{3\pi}{44},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 递减，不满足 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调

若 $\omega=9,\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=\sin\left(9x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，满足 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调递减

故选 B.

13．由已知得：$\vec{a}+\vec{b}=(m+1,3)$

$\therefore \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2 \Leftrightarrow (m+1)^2+3^2=m^2+1^2+1^2+2^2$，解得 $m=-2$.

14．设展开式的第 $k+1$ 项为 T_{k+1}，$k\in\{0,1,2,3,4,5\}$

$\therefore T_{k+1}=\mathrm{C}_5^k(2x)^{5-k}\left(\sqrt{x}\right)^k=\mathrm{C}_5^k 2^{5-k}x^{5-\frac{k}{2}}$.

当 $5-\dfrac{k}{2}=3$ 时，$k=4$，即 $T_5=\mathrm{C}_5^4 2^{5-4}x^{5-\frac{4}{2}}=10x^3$

故答案为 10.

15．由于 $\{a_n\}$ 是等比数列，设 $a_n=a_1q^{n-1}$，其中 a_1 是首项，q 是公比.

$\therefore \begin{cases} a_1+a_3=10 \\ a_2+a_4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_1q^2=10 \\ a_1q+a_1q^3=5 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a_1=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

故 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$，$\therefore a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(-3)+(-2)+\ldots+(n-4)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(n-7)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]}$

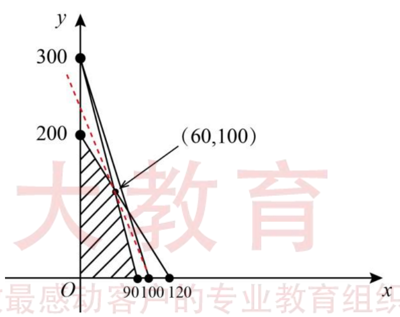
当 $n=3$ 或 4 时，$\dfrac{1}{2}\left[\left(n-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}\right]$ 取到最小值 -6，此时 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]}$ 取到最大值 2^6.

所以 $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ 的最大值为 64.

16．设生产 A 产品 x 件，B 产品 y 件，根据所耗费的材料要求、工时要求等其他限制条件，构造线性规则约束为

$$\begin{cases} 1.5x+0.5y\leqslant 150 \\ x+0.3y\leqslant 90 \\ 5x+3y\leqslant 600 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x\in N^* \\ y\in N^* \end{cases}$$

可行域为：



目标函数 $z=2100x+900y$

作出可行域为图中的四边形，包括边界，顶点为 $(60,100)$ $(0,200)$ $(0,0)$ $(90,0)$

在 $(60,100)$ 处取得最大值，$z=2100\times 60+900\times 100=216000$

17．(1) $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$

由正弦定理得：$2\cos C(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)=\sin C$

$2\cos C\cdot\sin(A+B)=\sin C$

$\because A+B+C=\pi$，A、B、$C\in(0，\pi)$

$\therefore \sin(A+B)=\sin C>0$

$\therefore 2\cos C=1$，$\cos C=\dfrac{1}{2}$

$\because C\in(0，\pi)$

$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$

(2) 由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

$7=a^2+b^2-2ab\cdot\dfrac{1}{2}$

$(a+b)^2-3ab=7$

$S=\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ab=6$

$\therefore (a+b)^2-18=7$

$a+b=5$

$\therefore \triangle ABC$ 周长为 $a+b+c=5+\sqrt{7}$

18. (1) $\because$ $ABEF$ 为正方形

$\therefore AF\perp EF$

$\because \angle AFD=90^\circ$

$\therefore AF\perp DF$

$\because DF\cap EF=F$

$\therefore AF\perp$ 面 $EFDC$

$AF\perp$ 面 $ABEF$

$\therefore$ 平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$

(2) 由(1)知：$\angle DFE=\angle CEF=60^\circ$

$\because AB\parallel EF$

$AB\not\subset$ 平面 $EFDC$

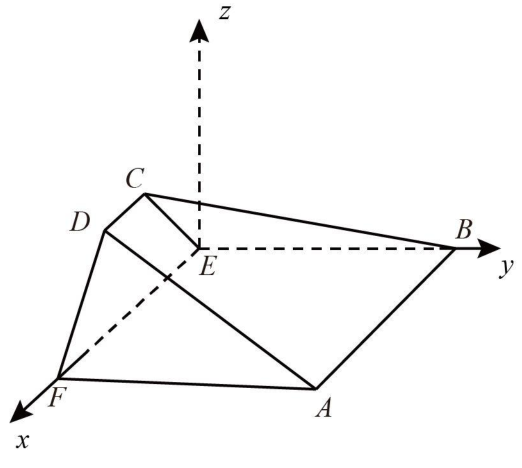
$EF\subset$ 平面 $EFDC$

$\therefore AB\parallel$ 平面 $ABCD$

$AB\subset$ 平面 $ABCD$

$\because$ 面 $ABCD\cap$ 面 $EFDC=CD$

$\therefore AB\parallel CD$



$\therefore CD \parallel EF$

$\therefore$四边形 $EFDC$ 为等腰梯形

以 E 为原点，如图建立坐标系，设 $FD=a$

$E(0，0，0)$ $\quad B(0，2a，0)$ $\quad C\left(\frac{a}{2}，0，\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ $\quad A(2a，2a，0)$

$\overrightarrow{EB}=(0，2a，0)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{a}{2}，-2a，\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-2a，0，0)$

设面 BEC 法向量为 $\vec{m}=(x，y，z)$.

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2a\cdot y_1=0\\ \frac{a}{2}\cdot x_1-2ay_1+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot z_1=0\end{cases}$

$x_1=\sqrt{3}$，$y_1=0$，$z_1=-1$，$\vec{m}=(\sqrt{3}，0，-1)$

设面 ABC 法向量为 $\vec{n}=(x_2，y_2，z_2)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$.即 $\begin{cases}\frac{a}{2}x_2-2ay_2+\frac{\sqrt{3}}{2}az_2=0\\ 2ax_2=0\end{cases}$

$x_2=0$，$y_2=\sqrt{3}$，$z_2=4$，$\vec{n}=(0，\sqrt{3}，4)$

设二面角 $E-BC-A$ 的大小为 θ.

$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-4}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{3+16}}=-\frac{2\sqrt{19}}{19}$

$\therefore$二面角 $E-BC-A$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$

19．(1) 每台机器更换的易损零件数为 8，9，10，11

记事件 A_i 为第一台机器 3 年内换掉 $i+7$ 个零件 $(i=1,2,3,4)$

记事件 B_i 为第二台机器 3 年内换掉 $i+7$ 个零件 $(i=1,2,3,4)$

由题知 $P(A_1)=P(A_3)=P(A_4)=P(B_1)=P(B_3)=P(B_4)=0.2$，$P(A_2)=P(B_2)=0.4$

设 2 台机器共需更换的易损零件数的随机变量为 X，则 X 的可能的取值为 16，17，18，19，20，21，22

$P(X=16)=P(A_1)P(B_1)=0.2\times0.2=0.04$

$P(X=17)=P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)=0.2\times0.4+0.4\times0.2=0.16$

$P(X=18)=P(A_1)P(B_3)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_1)=0.2\times0.2+0.2\times0.2+0.4\times0.4=0.24$

$P(X=19)=P(A_1)P(B_4)+P(A_2)P(B_3)+P(A_3)P(B_2)+P(A_4)P(B_1)=0.2\times0.2+0.2\times0.2+0.4\times0.2$
$+0.2\times0.4=0.24$

$P(X=20)=P(A_2)P(B_4)+P(A_3)P(B_3)+P(A_4)P(B_2)=0.4\times0.2+0.2\times0.4+0.2\times0.2=0.2$

$P(x=21)=P(A_3)P(B_4)+P(A_4)P(B_3)=0.2\times0.2+0.2\times0.2=0.08$

$P(x=22)=P(A_4)P(B_4)=0.2\times0.2=0.04$

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

⑵ 要令 $P(x\leqslant n)\geqslant0.5$，$\because 0.04+0.16+0.24<0.5$， $0.04+0.16+0.24+0.24\geqslant0.5$

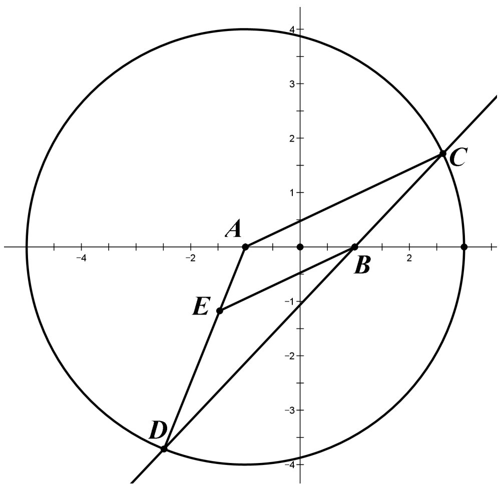
则 n 的最小值为 19

⑶ 购买零件所需费用含两部分，一部分为购买机器时购买零件的费用，另一部分为备件不足时额外购买的费用

当 $n=19$ 时，费用的期望为 $19\times200+500\times0.2+1000\times0.08+1500\times0.04=4040$

当 $n=20$ 时，费用的期望为 $20\times200+500\times0.08+1000\times0.04=4080$

所以应选用 $n=19$



20. ⑴ 圆 A 整理为 $(x+1)^2+y^2=16$， A 坐标 $(-1,0)$，如图，

$\because BE//AC$，则 $\angle C=\angle EBD$，

由 $AC=AD$,则 $\angle D=\angle C$，

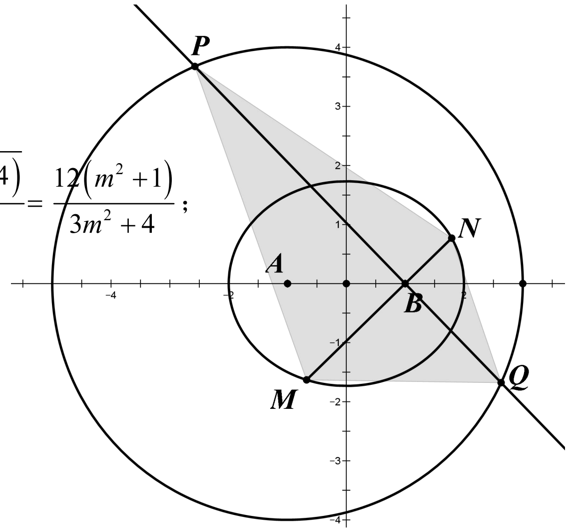
$\therefore \angle EBD=\angle D$, 则 $EB=ED$

$\therefore AE+EB=AE+ED=AD=4$

所以 E 的轨迹为一个椭圆，方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$(y\neq0)$；

⑵ $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$； 设 $l:x=my+1$，

因为 $PQ\perp l$，设 $PQ:y=-m(x-1)$，联立 l 与椭圆 C_1



$\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$；

则 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_M-y_N|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{36m^2+36\left(3m^2+4\right)}}{3m^2+4}=\dfrac{12\left(m^2+1\right)}{3m^2+4}$；

圆心 A 到 PQ 距离 $d=\dfrac{|-m(-1-1)|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$，

所以 $|PQ|=2\sqrt{|AQ|^2-d^2}=2\sqrt{16-\dfrac{4m^2}{1+m^2}}=\dfrac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore S_{MPNQ}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{12\left(m^2+1\right)}{3m^2+4}\cdot\dfrac{4\sqrt{3m^2+4}}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{24\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{3m^2+4}}=24\sqrt{\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{m^2+1}}}\in\left[12,8\sqrt{3}\right)$

21．(1) 由已知得：$f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)\left(e^x+2a\right)$

① 若 $a=0$，那么 $f(x)=0\Leftrightarrow(x-2)e^x=0\Leftrightarrow x=2$， $f(x)$ 只有唯一的零点 $x=2$，不合题意；

② 若 $a>0$，那么 $e^x+2a>e^x>0$，

所以当 $x>1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增

当 $x<1$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减

即：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上至多一个零点，在 $(-\infty,1)$ 上至多一个零点

由于 $f(2)=a>0$， $f(1)=-e<0$，则 $f(2)f(1)<0$，

根据零点存在性定理， $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上有且仅有一个零点.

而当 $x<1$ 时， $e^x<e$， $x-2<-1<0$，

故 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2>e(x-2)+a(x-1)^2=a(x-1)^2+e(x-1)-e$

则 $f(x)=0$ 的两根 $t_1=\dfrac{-e-\sqrt{e^2+4ae}}{2a}+1$，$t_2=\dfrac{-e+\sqrt{e^2+4ae}}{2a}+1$， $t_1<t_2$，因为 $a>0$，故当 $x<t_1$ 或

$x>t_2$ 时， $a(x-1)^2+e(x-1)-e>0$

因此，当 $x<1$ 且 $x<t_1$ 时， $f(x)>0$

又 $f(1)=-e<0$，根据零点存在性定理， $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 有且只有一个零点.

此时， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有两个零点，满足题意.

③ 若 $-\dfrac{e}{2}<a<0$，则 $\ln(-2a)<\ln e=1$，

当 $x<\ln(-2a)$ 时， $x-1<\ln(-2a)-1<0$， $e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，

即 $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $\ln(-2a)<x<1$ 时， $x-1<0$， $e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)<0$， $f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时， $x-1>0$， $e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增.

即：

x	$(-\infty,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

而极大值

$f[\ln(-2a)]=-2a[\ln(-2a)-2]+a[\ln(-2a)-1]^2=a\{[\ln(-2a)-2]^2+1\}<0$

故当 $x\leqslant 1$ 时， $f(x)$ 在 $x=\ln(-2a)$ 处取到最大值 $f[\ln(-2a)]$，那么 $f(x)\leqslant f[\ln(-2a)]<0$ 恒成立，

即 $f(x)=0$ 无解

而当 $x>1$ 时， $f(x)$ 单调递增，至多一个零点

此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多一个零点，不合题意.

④ 若 $a=-\frac{e}{2}$，那么 $\ln(-2a)=1$

当 $x<1=\ln(-2a)$ 时， $x-1<0$， $e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增

当 $x>1=\ln(-2a)$ 时， $x-1>0$， $e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有意义，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时至多一个零点，不合题意.

⑤ 若 $a<-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$

当 $x<1$ 时， $x-1<0$， $e^x+2a<e^1+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增

当 $1<x<\ln(-2a)$ 时， $x-1>0$， $e^x+2a<e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)<0$，

$f(x)$ 单调递减

当 $x>\ln(-2a)$ 时， $x-1>\ln(-2a)-1>0$， $e^x+2a>e^{\ln(-2a)}+2a=0$，即 $f'(x)>0$，

$f(x)$ 单调递增

即：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

故当 $x\leqslant\ln(-2a)$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到最大值 $f(1)=-e$，那么 $f(x)\leqslant-e<0$ 恒成立，即 $f(x)=0$ 无解

当 $x>\ln(-2a)$ 时， $f(x)$ 单调递增，至多一个零点

此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多一个零点，不合题意.

综上所述，当且仅当 $a>0$ 时符合题意，即 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

⑵ 由已知得：$f(x_1)=f(x_2)=0$，不难发现 $x_1\neq 1$， $x_2\neq 1$，

故可整理得：$-a=\dfrac{(x_1-2)e^{x_1}}{(x_1-1)^2}=\dfrac{(x_2-2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$

设 $g(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，则 $g(x_1)=g(x_2)$

那么 $g'(x)=\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3}e^x$，当 $x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

设 $m>0$，构造代数式：

$$g(1+m)-g(1-m)=\frac{m-1}{m^2}e^{1+m}-\frac{-m-1}{m^2}e^{1-m}=\frac{1+m}{m^2}e^{1-m}\left(\frac{m-1}{m+1}e^{2m}+1\right)$$

设 $h(m)=\dfrac{m-1}{m+1}e^{2m}+1$， $m>0$

则 $h'(m)=\dfrac{2m^2}{(m+1)^2}e^{2m}>0$，故 $h(m)$ 单调递增，有 $h(m)>h(0)=0$.

因此，对于任意的 $m>0$， $g(1+m)>g(1-m)$.

由 $g(x_1)=g(x_2)$ 可知 x_1、 x_2 不可能在 $g(x)$ 的同一个单调区间上，不妨设 $x_1<x_2$，则必有 $x_1<1<x_2$

令 $m=1-x_1>0$，则有 $g[1+(1-x_1)]>g[1-(1-x_1)]\Leftrightarrow g(2-x_1)>g(x_1)=g(x_2)$

而 $2-x_1>1$， $x_2>1$， $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，因此：$g(2-x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow 2-x_1>x_2$

整理得：$x_1+x_2<2$.

22. ⑴ 设圆的半径为 r，作 $OK\perp AB$ 于 K

∵ $OA=OB$，$\angle AOB=120°$

∴ $OK\perp AB$，$\angle A=30°$，$OK=OA\cdot\sin 30°=\dfrac{OA}{2}=r$

∴ AB 与 $\odot O$ 相切

⑵ 方法一：

假设 CD 与 AB 不平行

CD 与 AB 交于 F

$FK^2 = FC \cdot FD$ ①

$\because$ A、B、C、D 四点共圆

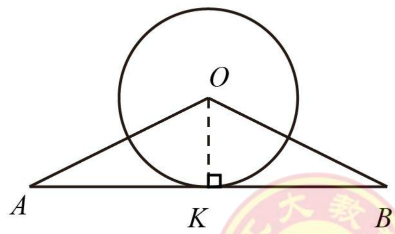
$\therefore$ $FC \cdot FD = FA \cdot FB = \left(FK - AK\right)\left(FK + BK\right)$

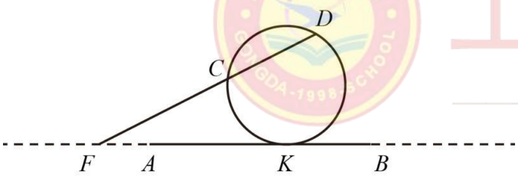
$\because$ $AK = BK$

$\therefore$ $FC \cdot FD = \left(FK - AK\right)\left(FK + AK\right) = FK^2 - AK^2$ ②

由①②可知矛盾

$\therefore$ $AB \parallel CD$





方法二：

因为 A,B,C,D四点共圆，不妨设圆心为 T，因为 $OA = OB, TA = TB$, 所以 O,T 为 AB 的中垂线上，同理 $OC = OD, TC = TD$, 所以 OT为CD 的中垂线，所以 $AB \parallel CD$.

23．(1) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = 1 + a\sin t \end{cases}$ （t 均为参数）

$\therefore$ $x^2 + \left(y-1\right)^2 = a^2$ ①

$\therefore$ C_1 为以 $\left(0，1\right)$ 为圆心，a 为半径的圆．方程为 $x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0$

$\because$ $x^2 + y^2 = \rho^2$，$y = \rho\sin\theta$

$\therefore$ $\rho^2 - 2\rho\sin\theta + 1 - a^2 = 0$ 即为 C_1 的极坐标方程

⑵ C_2： $\rho=4\cos\theta$

两边同乘 ρ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$ $\because \rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$

$\therefore x^2+y^2=4x$

即 $(x-2)^2+y^2=4$ ②

C_3：化为普通方程为 $y=2x$

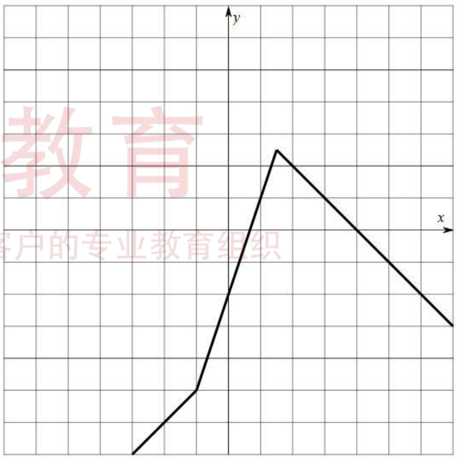
由题意：C_1 和 C_2 的公共方程所在直线即为 C_3

①—②得：$4x-2y+1-a^2=0$，即为 C_3

$\therefore 1-a^2=0$

$\therefore a=1$

24．⑴ 如图所示：



⑵ $f(x)=\begin{cases}x-4，x\leqslant -1\\ 3x-2，-1<x<\dfrac{3}{2}\\ 4-x，x\geqslant \dfrac{3}{2}\end{cases}$

$|f(x)|>1$

当 $x\leqslant -1$，$|x-4|>1$，解得 $x>5$ 或 $x<3$

$\therefore x\leqslant -1$

当 $-1<x<\dfrac{3}{2}$，$|3x-2|>1$，解得 $x>1$ 或 $x<\dfrac{1}{3}$

$\therefore -1<x<\dfrac{1}{3}$ 或 $1<x<\dfrac{3}{2}$

当 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$，$|4-x|>1$，解得 $x>5$ 或 $x<3$

$\therefore \dfrac{3}{2}\leqslant x<3$ 或 $x>5$

综上，$x<\dfrac{1}{3}$ 或 $1<x<3$ 或 $x>5$

$\therefore |f(x)|>1$，解集为 $\left(-\infty，\dfrac{1}{3}\right)\cup(1，3)\cup(5，+\infty)$