2021年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷（参考答案）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

1-5 CCABD

6-10 CBBAD

11-12 CB

13. 4

14. $\frac{3}{5}$

15. $2\sqrt{2}$

16. ②⑤或③④

17. 解：（1）各项所求值如下所示

$\bar{x}=\frac{1}{10}(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7)=10.0$

$\bar{y}=\frac{1}{10}(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5)=10.3$

$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(9.7-10.0)^2+2\times(9.8-10.0)^2+(9.9-10.0)^2+2\times(10.0-10.0)^2+(10.1-10.0)^2+2\times(10.2-10.0)^2+(10.3-10.0)^2]=0.36$,

$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(10.0-10.3)^2+3\times(10.1-10.3)^2+(10.3-10.3)^2+2\times(10.4-10.3)^2+2\times(10.5-10.3)^2+(10.6-10.3)^2]=0.4$.

(2)由(1)中数据得$\bar{y}-\bar{x}=0.3$, $2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}\approx0.34$

显然$\bar{y}-\bar{x}<2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，所以不认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18. 解：（1）因为PD⊥平面ABCD，且矩形ABCD中，AD⊥DC，所以以$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DP}$分别为x，y，z轴正方向，D为原点建立空间直角坐标系D-xyz。

设BC=t，A（t，0，0），B（t，1，0），M（$\frac{t}{2}$，1，0），P(0,0,1)，所以$\overrightarrow{PB}$=（t，1，-1），$\overrightarrow{AM}$=（$-\frac{1}{2}$，1，0），

因为PB⊥AM，所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{t^2}{2}+1=0$，所以$t=\sqrt{2}$，所以$BC=\sqrt{2}$。

（2）设平面 APM 的一个法向量为 m=（x，y，z），由于$\overrightarrow{AP}$=（$-\sqrt{2}$，0，1），则

$$\begin{cases} \mathbf{m}\bullet\overrightarrow{AP}=-\sqrt{2}x+z=0 \\ \mathbf{m}\bullet\overrightarrow{AM}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+y=0 \end{cases}$$

令 x=$\sqrt{2}$，得 m=（$\sqrt{2}$，1，2）。

设平面 PMB 的一个法向量为 n=（x'，y'，z'），则

$$\begin{cases} \mathbf{n}\bullet\overrightarrow{CB}=\sqrt{2}x^t=0 \\ \mathbf{n}\bullet\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}x^t+y^t-z^t=0 \end{cases}$$

令y^t=1，得 n=(0, 1, 1).

所以 cos（m，n）$=\frac{\mathbf{m}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$，所以二面角 A-PM-B 的正弦值为$\frac{\sqrt{70}}{14}$

19. （1）由已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$，则$\frac{b_n}{b_{n+1}}=S_n(n\geqslant2)$

$\Rightarrow\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2\Rightarrow2b_{n-1}+2=2b_n\Rightarrow b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant2)$，$b_1=\frac{3}{2}$

故$\{b_n\}$是以$\frac{3}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列。

（2）由（1）知 $b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}$，则$\frac{2}{S_n}+\frac{2}{n+2}=2\Rightarrow S_n=\frac{n+2}{n+1}$

n=1 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$

n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$

故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geq2\end{cases}$

20. （1）$[xf(x)]'=x'f(x)+xf'(x)$

当 x=0 时，$[xf(x)]'=f(0)=\ln a=0$，所以 a=1

（2）由 $f(x)=\ln(1-x)$，得 x＜1

当 0＜x＜1 时，$f(x)=\ln(1-x)<0$，$xf(x)<0$；当 x＜0 时，$f(x)=\ln(1-x)>0$，$xf(x)<0$

故即证 $x+f(x)>xf(x)$，$x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)>0$

令 $1-x=t(t>0$ 且 $t\neq1)$，$x=1-t$，即证 $1-t+\ln t-(1-t)\ln t>0$

令 $f(t)=1-t+\ln t-(1-t)\ln t$，则

$f'(t)=-1+\frac{1}{t}-[(-1)\ln t+\frac{1-t}{t}]=-1+\frac{1}{t}+\ln t-\frac{1-t}{t}=\ln t$

所以 f(t)在（0, 1）上单调递减，在（1, +∞）上单调递增，故 f(t)＞f（1）=0，得证。

21. 解：（1）焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$到$x^2+(y+4)^2=1$ 的最短距离为$\frac{p}{2}+3=4$，所以 p=2.

（2）抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则

$l_{PA}=y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+y_1=\frac{1}{2}x_1X-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x-y_1$，

$l_{PB}:y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$，且 $x_0^2=-y_0^2-8y_0-15$.

l_{PA}，l_{PB} 都过点 $P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}y_0=\frac{1}{2}x_1x_0-y_1,\\ y_0=\frac{1}{2}x_2x_0-y_2,\end{cases}$ 故 $l_{AB}:y_0=\frac{1}{2}x_0x-y$，即 $y=\frac{1}{2}x_0x-y_0$.

联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-y_0\\ x^2=4y\end{cases}$，得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，$\Delta=4x_0^2-16y_0$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{4+x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}$，$d_{P\to AB}=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，所以

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{P\to AB}=\frac{1}{2}|x_0^2-4y_0|\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}=\frac{1}{2}(x_4^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(-y_0{}^2-12y_0-15)^{\frac{3}{2}}$.

而 $y_0\in[-5,-3]$. 故当 $y_0=-5$ 时，$S_{\triangle PAB}$ 达到最大，最大值为 $20\sqrt{5}$.

22. (1) 因为⊙C的圆心为(2, 1)，半径为1. 故⊙C的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\theta\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）.

(2) 设切线 $y=k(x-4)+1$，即 $kx-y-4k+1=0$. 故

$$\frac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$$

即 $|2k|=\sqrt{1+k^2}$，$4k^2=1+k^2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 故直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$

故两条切线的极坐标方程为 $\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$ 或 $\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$.

23. 解：(1) $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|+|x+3|$，即求 $|x-1|+|x-3|\geqslant 6$ 的解集.
当 $x\geqslant1$ 时，$2x+2\geqslant6$，得 $x\geqslant2$；
当 $-3<x<1$ 时，$4\geqslant6$ 此时没有 x 满足条件；
当 $x\leqslant-3$ 时 $-2x-2\geqslant6$. 得 $x\leqslant-4$，
综上，解集为 $(-\infty,-4]\cup[2,-\infty)$.
(2) $f(x)$ 最小值 $>-a$，而由绝对值的几何意义，即求 x 到 a 和 -3 距离的最小值.
当 x 在 a 和 -3 之间时最小，此时 $f(x)$ 最小值为 $|a+3|$，即 $|a+3|>-a$.

$A\geqslant-3$ 时，$2a+3>0$，得 $a>-\frac{3}{2}$；$a<-3$ 时，$-a-3>-a$，此时 a 不存在.