

太原市2021年高三年级模拟考试(一)

数学试卷(理科)

(考试时间:下午3:00—5:00)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷1至4页,第 II 卷5至8页。
2. 回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 1\}$, $B = \{x \mid 2^x < 1\}$, 则 $A \cap B =$

A. $(-1, 0)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(-1, 1)$

D. $(0, 1)$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{z-i}{z+1} = i$, 则复数 $z =$

A. $1 - i$

B. $1 + i$

C. $-1 - i$

D. $-1 + i$

3. 公元前6世纪,古希腊毕达哥拉斯学派在研究正五边形和正十边形的作图时,发现了黄金分割数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 其近似值为0.618, 这是一个伟大的发现,这一数值也表示为 $a = 2\sin 18^\circ$,

若 $a^2 + b = 4$, 则 $\frac{a^2 b}{1 - \cos 72^\circ} =$

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D. 4

9. 已知 $a = 2\ln 3^\pi$, $b = 3\ln 2^\pi$, $c = 2\ln \pi^3$, 则下列结论正确的是

A. $b < c < a$

B. $c < b < a$

C. $b < a < c$

D. $a < b < c$

10. 已知三棱锥 $A - BCD$ 中, $AB = BC = BD = CD = AD = 4$, 二面角 $A - BD - C$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$,

点 E 在棱 AB 上, 且 $BE = 3AE$, 过 E 作三棱锥 $A - BCD$ 外接球的截面, 则所作截面面积的最小值为

A. $\frac{10\pi}{3}$

B. 3π

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

11. 已知过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 的直线与该抛物线相交于 A, B 两点, 点 M 是

线段 AB 的中点, 以 AB 为直径的圆与 y 轴相交于 P, Q 两点, 若 $\overline{AF} = 2\overline{FB}$, 则 $\sin \angle MPQ =$

A. $\frac{5}{9}$

B. $\frac{3}{7}$

C. $\frac{9}{17}$

D. $\frac{5}{13}$

12. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$,

$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}\right]$ 上单调递增, 则 ω 的所有取值的个数是

A. 3

B. 4

C. 1

D. 2

数学试卷(理科)

第Ⅱ卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.试题中包含两空的,答对第一空的给3分,全部答对的给5分.

13. 函数 $f(x) = (x+2)e^{-x}$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为_____.

14. 在 $(1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^4 + (1-x)^5 + (1-x)^6$ 的展开式中, x^3 的系数为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = \frac{3}{2}$, $a_{n+2} = a_n + 2 \times 3^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $b_n = a_n + a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列

$\{b_n\}$ 的通项公式为_____, 若 $b_n c_n = \frac{4(n+1)}{3(4n^2-1)} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点是点 F , 过原点倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 与椭圆 C 相

交于 M, N 两点, 若 $\angle MFN = \frac{2\pi}{3}$, 则椭圆 C 的离心率是_____.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17.(本小题满分12分)

已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边, $3c\sin A = 4b\sin C$,再从下面条件①与②中任选一个作为已知条件,完成以下问题:

(I)证明: $\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(II)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{5}$,点 D 在线段 AB 上,且 $BD = 2DA$,求 CD 的长.

条件①: $\cos C = \frac{2}{3}$;条件②: $\cos A = \frac{1}{9}$.

【注:如果选择条件①和条件②分别解答,按第一个解答计分.】

18.(本小题满分12分)

某地区为了实现产业的转型发展,利用当地旅游资源丰富多样的特点,决定大力发展旅游产业,一方面对现有旅游资源进行升级改造,另一方面不断提高旅游服务水平.为此该地区旅游部门,对所推出的报团游和自助游项目进行了深入调查,下表是该部门从去年某月到该地区旅游的游客中,随机抽取的100位游客的满意度调查表.

满意度	老年人		中年人		青年人	
	报团游	自助游	报团游	自助游	报团游	自助游
满意	12	1	18	4	15	6
一般	2	1	6	4	4	12
不满意	1	1	6	2	3	2

(I)已知甲是此次调查时满意度为“满意”的报团游游客,由上表中的数据分析,甲最有可能是老年人、中年人和青年人这三种人群中的哪一类人群?

(II)为了提高服务水平,该旅游部门要从上述样本里满意度为“不满意”的游客中,随机抽取3人征集整改建议,记 X 表示这3人中老年人的人数,求 X 的分布列和期望.

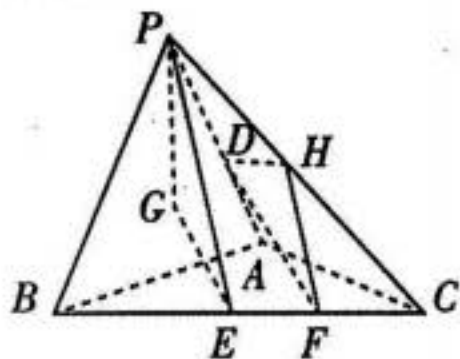
(III)若你朋友要到该地区旅游,根据上表中的数据,你会建议他选择哪种旅游项目?

19. (本小题满分12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAB$ 是正三角形, G 是 $\triangle PAB$ 的重心, D,E,H 分别是 PA,BC,PC 的中点,点 F 在 BC 上,且 $BF=3FC$.

(I) 求证:平面 $DFH \parallel$ 平面 PGE ;

(II) 若 $PB \perp AC, AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$,求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



20. (本小题满分12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ,其离心率 $e = \frac{1}{2}$,点 P 是椭圆

C 上一动点, $\triangle PF_1F_2$ 内切圆面积的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 直线 PF_1, PF_2 与椭圆 C 分别相交于点 A, B ,求证: $\frac{|PF_1|}{|F_1A|} + \frac{|PF_2|}{|F_2B|}$ 为定值.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = e^x + \cos x - ax - 2 (a \in \mathbf{R})$.

(I) 设 $g(x) = f(x) + ax$,求 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值;

(II) 若不等式 $xf(x) \geq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点

O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

(I) 求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(II) 已知点 $P(3, \sqrt{3})$, 曲线 C_1 与 C_2 相交于 A, B 两个不同点, 求 $||PA| - |PB||$ 的值.

23. (本小题满分10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x) = \left|x + \frac{2}{m}\right| + |x - m| (m > 0)$.

(I) 当 $m = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(II) 若存在 $x \in (0, 1)$, 使得不等式 $f(x) \leq 3$ 成立, 求实数 m 的取值范围.