太原市 2020 年高三年级模拟试题（一）

数学试题（理）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	A	D	B	D	C	A	D	C	D

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　14. $\frac{1}{2}$　　15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　16. 835

三、解答题（共 70 分）

（一）必考题

17. （本小题满分 12 分）

解（I）$\because 2R(\sin^2 B-\sin^2 A)=(a+c)\sin C$，

$\therefore 2R\cdot 2R(\sin^2 B-\sin^2 A)=2R(a+c)\sin C$，

即 $b^2=a^2+c^2+ac$，……………………3 分

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，……………………5 分

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$．……………………6 分

（II）$\because b=\sqrt{7},\ c=2$，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C=\frac{\sqrt{21}}{7}$，……………8 分

由 $b>c$，故 C 为锐角，$\cos C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，……………9 分

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+C\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{21}}{14}$．……………12 分

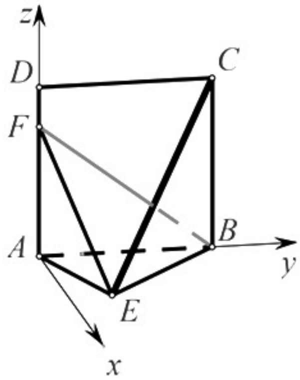
18. （本小题满分 12 分）

解（I）$\because AE\perp$ 平面 BCE，$BE\subset$ 平面 BCE，$BC\subset$ 平面 BCE，

$\therefore AE\perp BE, AE\perp BC$，……………………2 分

又 $\because BC\perp AB$，$\therefore AE\cap AB=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 ABE，……………

又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE. ……………………………………6 分



(Ⅱ) 如图所示，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

$\because AE=1, AB=2, AE \perp BE$，

$\therefore BE=\sqrt{3}$，$\therefore B(0,2,0), E(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$，……………………………8 分

假设线段 AD 上存在一点 F 满足题意，设 $F(0,0,h)$，$(h>0)$，

易知平面 ABF 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，……………………………9 分

设平面 BEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，而 $\overrightarrow{BE}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0)$, $\overrightarrow{BF}=(0,-2,h)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3}{2}y=0\\ -2y+hz=0\end{cases}$，所以可取 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,\dfrac{2}{h})$，………………………………10 分

由 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+\dfrac{4}{h^2}}}$，可得 $h=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 存在点 F 当 $AF=\sqrt{2}$ 时，二面角 $A-BF-E$ 所成角为 45^0. ……………………………12 分

19. （本小题满分 12 分）

解(Ⅰ)该混合样本阴性的概率是 $(\dfrac{2\sqrt{2}}{3})^2=\dfrac{8}{9}$，……………………………………2 分

根据对立事件原理，阳性的概率为 $1-\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{9}$. ……………………………………4 分

(Ⅱ) 方案一：逐个检验，检验次数为 4. ……………………………………5 分

方案二：由（Ⅰ）知，每组 2 个样本检验时，若阴性则检验次数为 1，概率为 $\dfrac{8}{9}$；

若阳性则检验次数为 3，概率为 $\dfrac{1}{9}$. 设方案二的检验次数记为 ξ，则 ξ 的可能取值为 2,4,6

其分布列如下，

ξ	2	4	6
p	$\dfrac{64}{81}$	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

可求得方案二的期望为 $E(\xi)=2\times\dfrac{64}{81}+4\times\dfrac{16}{81}+6\times\dfrac{1}{81}=\dfrac{198}{81}=\dfrac{22}{9}$. ……………………………9 分

方案三：混在一起检验，设方案三的检验次数记为η，η的可能取值为1,5.

其分布列如下，

η	1	5
p	$\frac{64}{81}$	$\frac{17}{81}$

可求得方案三的期望为$E(\eta)=1\times\frac{64}{81}+5\times\frac{17}{81}=\frac{149}{81}$. ……………………………………11 分

比较可得$E(\eta)<E(\xi)<4$，故选择方案三最“优”. ……………………………………12 分

20. （本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中$b^2=a^2-1$，

由已知当$\lambda=2$时，不妨设$|BF_2|=m$，则$|AF_2|=2m$，

$\because$ $|AB|=|BF_1|$，$\therefore|BF_1|=3m$，

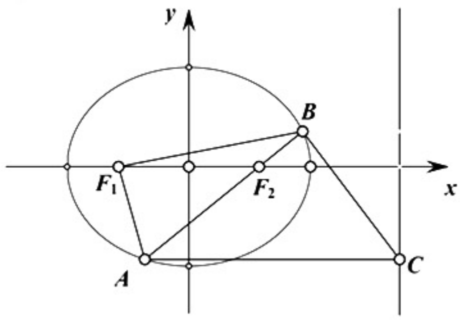
由椭圆定义得$2a=4m$，从而$|AF_1|=|AF_2|=2m$， ……………………………………2 分

故此时点A在y轴上，不妨设 $A(0,-b)$，从而由已知条件可得$B(\frac{3}{2},\frac{b}{2})$，………………4 分

代入椭圆方程，解得$a^2=3$，所以$b^2=a^2-1$=2，

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………6 分

（Ⅱ）直线BC过定点$H(2,0)$，证明如下，



设直线AB方程为$x=my+1$，代入椭圆$2x^2+3y^2=6$中，

$2(my+1)^2+3y^2=6$，即$(2m^2+3)y^2+4my-4=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=\frac{-4m}{2m^2+3}$，$y_1y_2=\frac{-4}{2m^2+3}$，$\therefore m=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$，

由题设知$C(3,y_1)$，直线BC斜率$k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-3}=\ =\frac{y_2-y_1}{my_2-2}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_1+y_2}{y_1}-2}=y_1$ ，

$\because BC$直线方程为$y-y_1=y_1(x-3)$，化简得：$y=y_1(x-2)$，故直线BC过$(2,0)$.

另解：（Ⅱ）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程'

得 $2x_1^2+3y_1^2=6$， ①

$2x_2^2+3y_2^2=6$， ②

②两边同乘以 λ^2，得 $2\lambda^2x_2^2+3\lambda^2y_2^2=6\lambda^2$， ③

①-③，得 $2(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)+3(y_1-\lambda y_2)(y_1+\lambda y_2)=6(1-\lambda^2)$， ④

由 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，得 $x_1+\lambda x_2=1+\lambda$，$y_1+\lambda y_2=0$，

将 $x_1+\lambda x_2=1+\lambda$，$y_1+\lambda y_2=0$ 代入④化简得：$x_1-\lambda x_2=3(1-\lambda)$，

从而 $x_1=2-\lambda$，$\lambda x_2=-1+2\lambda$，即 $\lambda(2-x_2)=3-2$，又 $-y_1=\lambda y_2$，

于是 $\overrightarrow{CH}=\lambda\overrightarrow{HB}$，$C,H,B$ 三点共线，因此无论 λ 如何变化，直线 BC 过定点 $H(2,0)$.

21.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，…………1 分

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\because \cos x>0$，$\therefore f'(x)>0$，$f(x)>f(0)=1$，$f(x)$ 无零点；…………2 分

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 时，$\because \cos x<0$，$\therefore f'(x)<0$，而 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$，$f(\frac{3\pi}{2})=-\frac{3\pi}{2}<0$，

$f(x)$ 有唯一零点；…………3 分

当 $x\in(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ 时，$\because \cos x>0$，$\therefore f'(x)>0$，而 $f(\frac{5\pi}{2})=\frac{5\pi}{2}>0$，$f(x)$ 有唯一零点；

…………4 分

综上，$f(x)$ 在 $(0,\frac{5\pi}{2})$ 有两个零点.…………5 分

（Ⅱ）证明① $g'(x)=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}=-\frac{f(x)}{x^2}$，…………6 分

由（Ⅰ）知 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 无极值点；

在 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 有极小值点，即为 x_1，在 $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ 有极大值点即为 x_2，

而 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$，$f(\pi)=-1<0$，$f(\frac{3\pi}{2})=-\frac{3\pi}{2}<0$，$f(2\pi)=1>0$，

可知 $x_1\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$x_2\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，

同理在 $(\frac{5\pi}{2},3\pi)$ 有极小值点 x_3，…，在 $\left(\frac{(2n-1)\pi}{2},n\pi\right)$ 有极值点 x_n.

由 $x_n\sin x_n+\cos x_n=0$，得 $\dfrac{\cos x_n}{x_n}=-\sin x_n$，$\tan x_n=-\dfrac{1}{x_n}$，

$\because x_1<x_2$，$\therefore -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$，$\tan(x_1+\pi)=\tan x_1<\tan x_2$，

而 $x_1+\pi\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，$x_2\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，故有 $x_1+\pi<x_2$，

$g(x_1)+g(x_2)=\dfrac{\cos x_1}{x_1}+\dfrac{\cos x_2}{x_2}=-\sin x_1-\sin x_2=\sin(x_1+\pi)-\sin x_2$

$\because$ $y=\sin x$ 在 $(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$ 是增函数，$\sin(x_1+\pi)-\sin x_2<0$，

即 $g(x_1)+g(x_2)<0$；……………………………8 分

② 同理，$x_{2k-1}\in\left(\dfrac{4k-3}{2}\pi,(2k-1)\pi\right)$，$x_{2k}\in\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi,2k\pi\right)$，

$\dfrac{4k-1}{2}\pi<x_{2k-1}+\pi<x_{2k}<2\pi$，由 $y=\sin x$ 在 $\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi,2\pi\right)$ 递增得

$g(x_{2k-1})+g(x_{2k})=\sin(x_{2k-1}+\pi)-\sin x_{2k}<0$，……………………………10 分

当 n 为偶数时，不妨设 $n=2k$，从 $g(x_1)$ 开始相邻两项配对，每组和均为负值，

即 $[g(x_1)+g(x_2)]+[g(x_3)+g(x_4)]+\cdots+[g(x_{2k-1})+g(x_{2k})]<0$，结论成立；

当 n 为奇数时，设 $n=2k+1$，$\because x_{2k+1}\in\left(\dfrac{4k+1}{2}\pi,(2k+1)\ \pi\right)$，$g(x_{2k+1})=-\sin x_{2k+1}<0$，

从 $f(x_1)$ 开始相邻两项配对，每组和均为负值，还多出最后一项也是负值，即

$[g(x_1)+g(x_2)]+[g(x_3)+g(x_4)]+\cdots+[g(x_{2k-1})+g(x_{2k})]+g(x_{2k+1})<0$，结论也成立.

综上，对一切 $n\in\mathrm{N}^+$，$g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)+\cdots+g(x_n)<0$ 成立. ……………………12 分

（二）选考题

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22.（本小题满分 10 分）

解（Ⅰ）设点 $M(x,y)$，$P(3\cos\theta,3\sin\theta)$，且点 $Q(6,0)$，由 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，

得 $\begin{cases}x=4+\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}$ ……………………………2 分

整理得$(x-4)^2+y^2=1$，即$x^2+y^2-8x+15=0$，......................3 分

化为极坐标方程为$\rho^2-8\rho\cos\theta+15=0$. ....5 分

（Ⅱ）设直线l：$y=kx$的极坐标方程为$\theta=\alpha$．设$A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$，

因为$\overline{OA}=4\overline{AB}$，所以$5\overline{OA}=4\overline{OB}$，即$5\rho_1=4\rho_2$，................................6 分

又 $\rho^2-8\cos\alpha\cdot\rho+15=0$， 则$\begin{cases}\rho_1+\rho_2=8cos\alpha,\\ \rho_1\rho_2=15,\\ 5\rho_1=4\rho_2,\end{cases}$ 解得$\cos\alpha=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$， ....8 分

所以$k^2=\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{13}{243}$， $k=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{27}$. ....10 分

【选修 4-5：不等式选讲】

23.（本小题满分 10 分）

解解：（Ⅰ）函数$f(x)+2g(x)=|2x-a|+2|x-1|$

$=|2x-a|+|2x-2|\ge|2x-a-(2x-2)|=|a-2|=1$，................................3 分

解得$a=1$或$a=3$；................................5 分

（Ⅱ）不等式$f(x)+g(x)<1$，即$|2x-a|+|x-1|<1$，

由题意，$x\in[\dfrac{1}{2},1]$时，$|2x-a|+1-x<1$成立，

$\therefore|2x-a|<x$．$\therefore\dfrac{a}{3}<x<a$，................................7 分

不等式$f(x)+g(x)<1$的解集包含$[\dfrac{1}{2},1]$，即$\dfrac{a}{3}<\dfrac{1}{2}$且$a>1$，................................9 分

解得$1<a<\dfrac{3}{2}$，所以实数a的取值范围是$(1,\ \dfrac{3}{2})$. ....10 分