2019~2020 学年第一学期高三年级期末考试

数学（理科）答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	A	B	D	B	A	A	C	D	C

二、填空题：

13、$y=x$　　14、-8　　15、$\dfrac{12}{13}$　　16、2559

三、解答题：

17、（本小题满分 12 分）

解：（I）由 $a_1+a_5=22$，得 $a_3=11$，所以 $d=a_4-a_3=4$，……2 分

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=4n-1$，……4 分

将 $a_n=4n-1$ 代入 $4\log_2 b_n=a_n-3$，得 $b_n=2^{n-1}$. ……6 分

（II）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $T_n=nb_1+(n-1)b_2+\cdots+2b_{n-1}+b_n=b_1+(b_1+b_2)+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$ ……8 分

$=S_1+S_2+\cdots+S_n=(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^n-1)$ ……10 分

$=(2+2^2+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-n-2$. ……12 分

18、(本小题满分 12 分)

解：（I）由 $A=2B$，知 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$，……2 分

由正弦定理和余弦定理得 $a=2b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，……4 分

即 $a^2=b(b+c)$，因为 $b=3,c=1,\therefore a=2\sqrt{3}$. ……6 分

（II）由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{3}$，……8 分

而 $0<A<\pi$，故 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin 2A=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos 2A=-\dfrac{7}{9}$，……10 分

所以 $\cos(2A+\frac{\pi}{6})=\cos 2A\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}$. ……………………………12 分

19、（本小题满分 12 分）

解：(Ⅰ) 由 $(0.005+0.010+0.025+a+0.020)\times 10=1$，解得 a=0.040， ……………………………2 分

设中位数为 x，则 $(0.005+0.010+0.025)\times 10+0.040\times(x-80)=0.5$， ……………………………4 分

解得 x=82.5，所以综合评分的中位数为 82.5. ……………………………5 分

(Ⅱ) 由频率分布直方图可知，一等品的频率为 $(0.040+0.020)\times 10=0.6$，即概率为 0.6，

……………………………6 分

设所抽取的产品为一等品的个数为 X，则 $X\sim B(3,\frac{3}{5})$，

所以 $P(X=0)=C_3^0(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$，　$P(X=1)=C_3^1\times(\frac{2}{5})^2\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$，

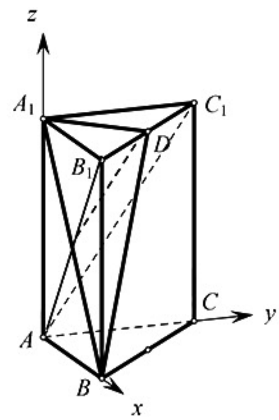
$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{3}{5})^2\times\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$，　$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$， ……………………………10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

所抽取的产品为一等品的数学期望 $E(X)=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$. ……………………………12 分

20、(本小题满分 12 分)



(Ⅰ) 证明：连接 AB_1，交 A_1B 于点 O，则 O 为 AB_1 中点，

连接 OD，又 D 是棱 B_1C_1 的中点，则 $OD\parallel AC_1$，……………3 分

$\because OD\subset$ 平面 A_1BD，$AC_1\not\subset$ 平面 A_1BD，

$\therefore AC_1\parallel$ 平面 A_1BD. ……………………………5 分

(Ⅱ) 解：由已知，$AB\perp AC$，则 AB,AC,AA_1 两两垂直,

以 A 为原点，如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $B(\sqrt{2},0,0),A_1(0,0,2),D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},2),C(0,\sqrt{2},0)$，……………………6 分

设$M(0,t,0)$ $(0\le t\le\sqrt{2})$，则，$\overrightarrow{BA_1}=(-\sqrt{2},0,2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$\overrightarrow{A_1M}=(0,t,-2)$，

设平面BA_1D的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+2z_1=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1=0,\end{cases}$ ∴可取 $\vec{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$.

设平面A_1DM的法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}ty_2-2z_2=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2=0,\end{cases}$ ∴可取$m=(-2,2,t)$.

……………9 分

∵ $\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45°=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\frac{\left|-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+t\right|}{\sqrt{5}\sqrt{t^2+8}}$，

……………………………………………………………………10 分

化简得：$3t^2+16\sqrt{2}t-24=0$，得$t=-6\sqrt{2}$或$t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∵$0\le t\le\sqrt{2}$，∴$t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴存在点M，此时$\frac{AM}{AC}=\frac{2}{3}$，使二面角$B-A_1D-M$的大小为$45°$. ……………………12 分

21、(本小题满分 12 分)

(Ⅰ)解：$f'(x)=1+ae^x$，……………………………………………………………………1 分

当$a\ge 0$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在 R 上单调递增；……………………………………2 分

当$a<0$时，$f'(\ln(-\frac{1}{a}))=0$，当$x<\ln(-\frac{1}{a})$时，$f'(x)>0$，$x>\ln(-\frac{1}{a})$时，$f'(x)<0$. …4 分

综上，当$a\ge 0$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,

$a<0$时，$f(x)$在$\left(-\infty,\ln(-\frac{1}{a})\right)$上递增，在$\left(\ln(-\frac{1}{a}),+\infty\right)$上递减. ………………………5 分

(Ⅱ)证明：由$f(x)=0$得$a=\frac{1-x}{e^x}$，设$g(x)=\frac{1-x}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{x-2}{e^x}$. ……………………7 分

由$g'(x)<0$，得$x<2$；由$g'(x)>0$，得$x>2$.

故 $g(x)_{\min}=g(2)=-\dfrac{1}{e^2}<0$ ，……8 分

当 $x>1$ 时，$g(x)<0$ ；当 $x<1$ 时，$g(x)>0$ ，

不妨设 $x_1<x_2$ ，则 $1<x_1<2<x_2$， 要证 $x_1+x_2>4$ ，只需证 $x_2>4-x_1$ ，

∵ $4-x_1>2$ 且 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，只需证 $g(x_2)>g(4-x_1)$ ，

而 $g(x_1)=g(x_2)=a$ ，只需证 $g(x_1)>g(4-x_1)$ ，即 $\dfrac{1-x_1}{e^{x_1}}>\dfrac{x_1-3}{e^{4-x_1}}$ ，

即证 $e^{2x_1-4}(x_1-3)+x_1-1<0$ ，……10 分

设 $h(x)=e^{2x-4}(x-3)+x-1,\ x\in(1,2)$，

则 $h'(x)=e^{2x-4}(2x-5)+1$ ，令 $m(x)=h'(x)$ ，则 $m'(x)=4e^{2x-4}(x-2)$ ，

∵ $x\in(1,2)$ ，∴ $m'(x)<0$ ，故 $m(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，∴ $h'(x)>h'(2)=0$，

∴ $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，∴ $h(x)<h(2)=0$ ，∴ $e^{2x_1-4}(x_1-3)+x_1-1<0$ ，

从而 $x_1+x_2>4$ 得证．……12 分

22、（本小题满分 10 分）

解：（I）由 $\begin{cases}x=t,\\ y=\sqrt{5}+2t,\end{cases}$ 得 $y=2x+\sqrt{5}$ ．……2 分

由 $\rho^2\cos 2\theta+4=0$ ，得 $\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta+4=0$ ，∴ $y^2-x^2=4$ ．……5 分

（II）将直线 l 的参数方程化为标准形式为：$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}t\\ y=\sqrt{5}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t\end{cases}$ （t 为参数），

代入曲线 C 的方程得 $\dfrac{3}{5}t^2+4t+1=0$ ，∴ $t_1+t_2=-\dfrac{20}{3},t_1\cdot t_2=\dfrac{5}{3}$ ，

则 $\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AN|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=|\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}|=4$ ……10 分

23、（本小题满分 10 分）

解：(Ⅰ) 当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-x+2x+1=x+1$，

$f(x)<2$，得 $x<1$，所以 $-\frac{1}{2} \leq x<1$． ……………………………………2 分

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-x-2x-1=-3x-1$．

由 $f(x)<2$，得 $x>-1$，所以 $-1<x<-\frac{1}{2}$． ……………………………………4 分

综上可知，$M=\{x \mid -1<x<1\}$． ……………………………………5 分

(Ⅱ) 因为 $a,b \in M$，所以 $-1<a<1$，$-1<b<1$，即 $|a|<1, |b|<1$， ……………………7 分

$\therefore |ab|+1-(|a|+|b|)=(|a|-1)(|b|-1)>0$， ……………………………………9 分

故 $|ab|+1>|a|+|b|$． ……………………………………10 分

注：以上各题其它解法相应给分