



绝密★启用前

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案

一、选择题

- 1. C      2. C      3. B      4. B      5. D      6. C
- 7. D      8. B      9. A      10. D      11. A      12. B

二、填空题

- 13.  $y = 3x$     14.  $\frac{5}{8}$       15.  $-4$       16.  $\sqrt{2}$

三、解答题

17. 解:

(1) 由调查数据, 男顾客中对该商场服务满意的比率为  $\frac{40}{50} = 0.8$ , 因此男顾客对该商场服务满意的概率的估计值为 0.8.

女顾客中对该商场服务满意的比率为  $\frac{30}{50} = 0.6$ , 因此女顾客对该商场服务满意的概率的估计值为 0.6.

$$(2) K^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} \approx 4.762.$$

由于  $4.762 > 3.841$ , 故有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异.

18. 解:

(1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ .

由  $S_9 = -a_5$  得  $a_1 + 4d = 0$ .

由  $a_3 = 4$  得  $a_1 + 2d = 4$ .

于是  $a_1 = 8, d = -2$ .

因此  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 10 - 2n$ .

(2) 由 (1) 得  $a_1 = -4d$ , 故  $a_n = (n-5)d, S_n = \frac{n(n-9)d}{2}$ .

由  $a_1 > 0$  知  $d < 0$ , 故  $S_n \geq a_n$  等价于  $n^2 - 11n + 10 \leq 0$ , 解得  $1 \leq n \leq 10$ .

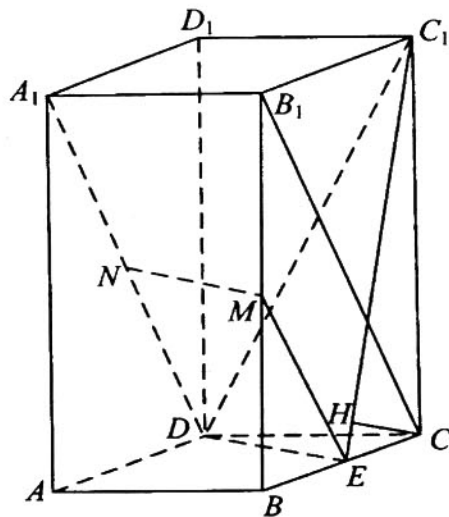
所以  $n$  的取值范围是  $\{n | 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}\}$ .





19. 解:

(1) 连结  $B_1C$ ,  $ME$ . 因为  $M$ ,  $E$  分别为  $BB_1$ ,  $BC$  的中点, 所以  $ME \parallel B_1C$ , 且  $ME = \frac{1}{2}B_1C$ . 又因为  $N$  为  $A_1D$  的中点, 所以  $ND = \frac{1}{2}A_1D$ .



由题设知  $A_1B_1 \parallel DC$ , 可得  $B_1C \parallel A_1D$ , 故  $ME \parallel ND$ , 因此四边形  $MNDE$  为平行四边形,  $MN \parallel ED$ . 又  $MN \not\subset$  平面  $C_1DE$ , 所以  $MN \parallel$  平面  $C_1DE$ .

(2) 过  $C$  作  $C_1E$  的垂线, 垂足为  $H$ .

由已知可得  $DE \perp BC$ ,  $DE \perp C_1C$ , 所以  $DE \perp$  平面  $C_1CE$ , 故  $DE \perp CH$ .

从而  $CH \perp$  平面  $C_1DE$ , 故  $CH$  的长即为  $C$  到平面  $C_1DE$  的距离.

由已知可得  $CE = 1$ ,  $C_1C = 4$ , 所以  $C_1E = \sqrt{17}$ , 故  $CH = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ . 从而点  $C$  到平面

$C_1DE$  的距离为  $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ .

# 工大教育

做最感动客户的专业教育组织

20. 解:

(1) 设  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g(x) = \cos x + x \sin x - 1$ ,  $g'(x) = x \cos x$ .

当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $g'(x) > 0$ ; 当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $g'(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  单调递增,

在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  单调递减.

又  $g(0) = 0$ ,  $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ ,  $g(\pi) = -2$ , 故  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  存在唯一零点.

所以  $f'(x)$  在  $(0, \pi)$  存在唯一零点.

(2) 由题设知  $f(\pi) \geq a\pi$ ,  $f(\pi) = 0$ , 可得  $a \leq 0$ .

由 (1) 知,  $f'(x)$  在  $(0, \pi)$  只有一个零点, 设为  $x_0$ , 且当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (x_0, \pi)$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  单调递增, 在  $(x_0, \pi)$  单调递减.

又  $f(0) = 0$ ,  $f(\pi) = 0$ , 所以, 当  $x \in [0, \pi]$  时,  $f(x) \geq 0$ .

又当  $a \leq 0$ ,  $x \in [0, \pi]$  时,  $ax \leq 0$ , 故  $f(x) \geq ax$ .

因此,  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 0]$ .





21. 解:

(1) 因为  $\odot M$  过点  $A, B$ , 所以圆心  $M$  在  $AB$  的垂直平分线上. 由已知  $A$  在直线  $x+y=0$  上, 且  $A, B$  关于坐标原点  $O$  对称, 所以  $M$  在直线  $y=x$  上, 故可设  $M(a, a)$ .

因为  $\odot M$  与直线  $x+2=0$  相切, 所以  $\odot M$  的半径为  $r=|a+2|$ .

由已知得  $|AO|=2$ , 又  $\overline{MO} \perp \overline{AO}$ , 故可得  $2a^2+4=(a+2)^2$ , 解得  $a=0$  或  $a=4$ .

故  $\odot M$  的半径  $r=2$  或  $r=6$ .

(2) 存在定点  $P(1,0)$ , 使得  $|MA|-|MP|$  为定值.

理由如下:

设  $M(x, y)$ , 由已知得  $\odot M$  的半径为  $r=|x+2|$ ,  $|AO|=2$ .

由于  $\overline{MO} \perp \overline{AO}$ , 故可得  $x^2+y^2+4=(x+2)^2$ , 化简得  $M$  的轨迹方程为  $y^2=4x$ .

因为曲线  $C: y^2=4x$  是以点  $P(1,0)$  为焦点, 以直线  $x=-1$  为准线的抛物线, 所以

$|MP|=x+1$ .

因为  $|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$ , 所以存在满足条件的定点  $P$ .

22. 解:

(1) 因为  $-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$ , 且  $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = (\frac{1-t^2}{1+t^2})^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$ , 所以  $C$  的直角坐标

方程为  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -1)$ .

$l$  的直角坐标方程为  $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$ .

(2) 由 (1) 可设  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数, } -\pi < \alpha < \pi)$ .

$C$  上的点到  $l$  的距离为

$$\frac{|2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11}{\sqrt{7}}$$

当  $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$  时,  $4 \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) + 11$  取得最小值 7, 故  $C$  上的点到  $l$  距离的最小值为  $\sqrt{7}$ .





23. 解:

(1) 因为  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ,  $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ,  $c^2 + a^2 \geq 2ac$ , 又  $abc = 1$ , 故有

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$ .

(2) 因为  $a, b, c$  为正数且  $abc = 1$ , 故有

$$\begin{aligned} (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 &\geq 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3} \\ &= 3(a+b)(b+c)(a+c) \\ &\geq 3 \times (2\sqrt{ab}) \times (2\sqrt{bc}) \times (2\sqrt{ac}) \\ &= 24. \end{aligned}$$

所以  $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$ .



# 工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

