



绝密★启用前

## 2019 年普通高等学校招生全国统一考试 理科数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | -4 < x < 2\}$ ,  $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ , 则  $M \cap N =$   
 A.  $\{x | -4 < x < 3\}$       B.  $\{x | -4 < x < -2\}$   
 C.  $\{x | -2 < x < 2\}$       D.  $\{x | 2 < x < 3\}$
2. 设复数  $z$  满足  $|z - i| = 1$ ,  $z$  在复平面内对应的点为  $(x, y)$ , 则  
 A.  $(x+1)^2 + y^2 = 1$       B.  $(x-1)^2 + y^2 = 1$   
 C.  $x^2 + (y-1)^2 = 1$       D.  $x^2 + (y+1)^2 = 1$
3. 已知  $a = \log_2 0.2$ ,  $b = 2^{0.2}$ ,  $c = 0.2^{0.3}$ , 则  
 A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $c < a < b$       D.  $b < c < a$

4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ( $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ , 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此。此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是

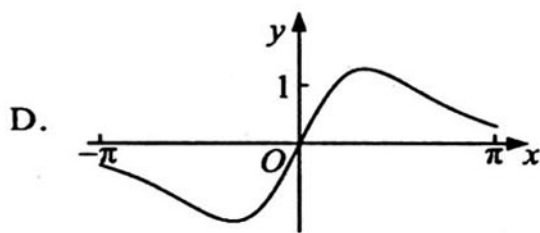
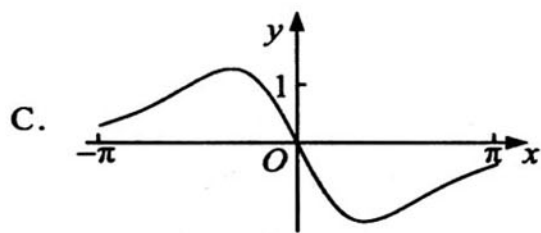
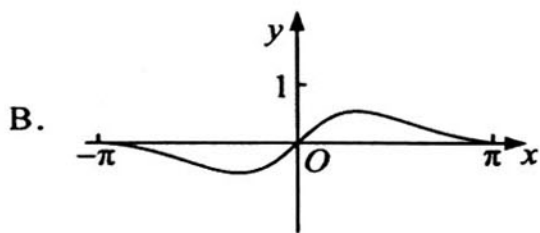
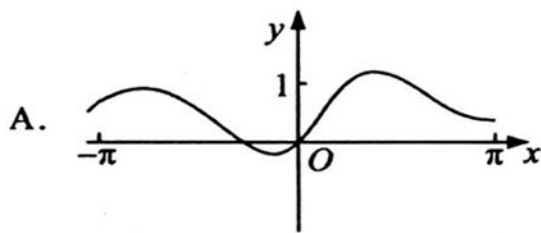


- A. 165 cm      B. 175 cm      C. 185 cm      D. 190 cm





5. 函数  $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$  在  $[-\pi, \pi]$  的图像大致为



6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的6个爻组成, 爻分为阳爻“—”和阴爻“--”, 右图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有3个阳爻的概率是



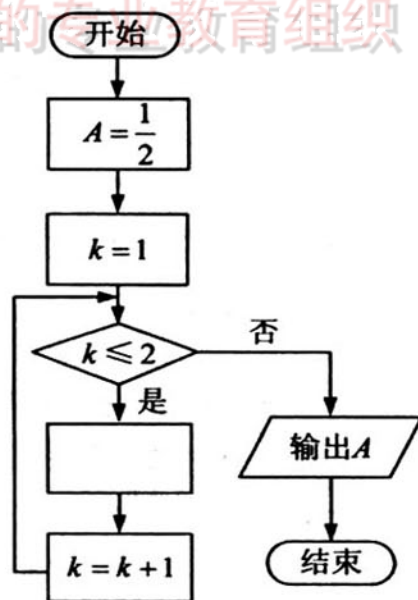
- A.  $\frac{5}{16}$       B.  $\frac{11}{32}$       C.  $\frac{21}{32}$       D.  $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量  $a, b$  满足  $|a| = 2|b|$ , 且  $(a-b) \perp b$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

8. 右图是求  $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$  的程序框图, 图中空白框中应填入

- A.  $A = \frac{1}{2+A}$   
 B.  $A = 2 + \frac{1}{A}$   
 C.  $A = \frac{1}{1+2A}$   
 D.  $A = 1 + \frac{1}{2A}$



9. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 已知  $S_4 = 0$ ,  $a_5 = 5$ , 则

- A.  $a_n = 2n - 5$       B.  $a_n = 3n - 10$       C.  $S_n = 2n^2 - 8n$       D.  $S_n = \frac{1}{2}n^2 - 2n$

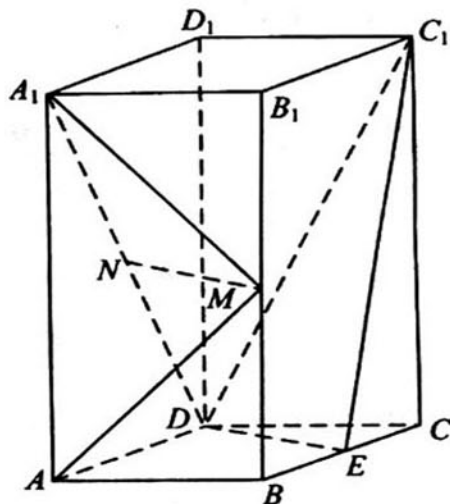






### 18. (12分)

如图, 直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面是菱形,  $AA_1 = 4$ ,  $AB = 2$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $E, M, N$  分别是  $BC, BB_1, A_1D$  的中点.



- (1) 证明:  $MN \parallel$  平面  $C_1DE$ ;
- (2) 求二面角  $A-MA_1-N$  的正弦值.

### 19. (12分)

已知抛物线  $C: y^2 = 3x$  的焦点为  $F$ , 斜率为  $\frac{3}{2}$  的直线  $l$  与  $C$  的交点为  $A, B$ , 与  $x$  轴的交点为  $P$ .

- (1) 若  $|AF| + |BF| = 4$ , 求  $l$  的方程;
- (2) 若  $\overline{AP} = 3\overline{PB}$ , 求  $|AB|$ .

### 20. (12分)

已知函数  $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数. 证明:

- (1)  $f'(x)$  在区间  $(-1, \frac{\pi}{2})$  存在唯一极大值点;
- (2)  $f(x)$  有且仅有 2 个零点.

### 21. (12分)

为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为  $\alpha$  和  $\beta$ , 一轮试验中甲药的得分记为  $X$ .

- (1) 求  $X$  的分布列;
- (2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分,  $p_i (i=0, 1, \dots, 8)$  表示“甲药的累计得分为  $i$  时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则  $p_0 = 0, p_8 = 1, p_i = \alpha p_{i-1} + \beta p_i + c p_{i+1} (i=1, 2, \dots, 7)$ , 其中  $a = P(X = -1), b = P(X = 0), c = P(X = 1)$ . 假设  $\alpha = 0.5, \beta = 0.8$ .
  - (i) 证明:  $\{p_{i+1} - p_i\} (i=0, 1, 2, \dots, 7)$  为等比数列;
  - (ii) 求  $p_4$ , 并根据  $p_4$  的值解释这种试验方案的合理性.





(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $2\rho\cos\theta + \sqrt{3}\rho\sin\theta + 11 = 0$ .

- (1) 求  $C$  和  $l$  的直角坐标方程;
- (2) 求  $C$  上的点到  $l$  距离的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知  $a, b, c$  为正数, 且满足  $abc = 1$ . 证明:

(1)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$ ;

(2)  $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$ .

# 工大教育

——做最感动客户的专业教育组织

