2018-2019 学年高三第一次模拟试题参考答案　数学（理科）

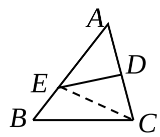
一．选择题：1. A　2. C　3. D　4. B　5. A　6. D　7. D　8. A　9. B　10. B　11. A　12. C

二. 填空题：　13. $y=-\dfrac{1}{4}$　　14. 15　　15. $\sqrt{22}$　　16. 1

三．解答题：

17. 解（Ⅰ）$\because a\sin A+(c-a)\sin C=b\sin B$，由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $a^2+c^2-ac=b^2$，

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，……………4 分



$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=60°$；……………6 分

（Ⅱ）连接 CE，$\because D$ 是 AC 的中点，$DE\perp AC$，$\therefore AE=CE$，

$\therefore CE=AE=\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A}$，……………7 分

在 ΔBCE 中，由正弦定理得 $\dfrac{CE}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\angle BEC}=\dfrac{BC}{\sin 2A}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A\sin 60°}=\dfrac{2}{2\sin A\cos A}$，$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=45°$，……………9 分

$\therefore \angle ACB=75°$，$\therefore \angle BCE=\angle ACB-\angle ACE=30°$，$\angle BEC=90°$，

$\therefore CE=AE=\sqrt{3}$，$AB=AE+BE=\sqrt{3}+1$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$．……………12 分

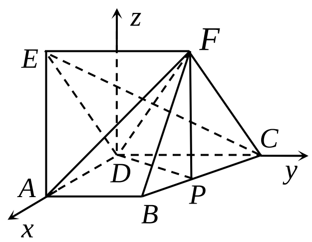
18. （Ⅰ）证明：$\because CDEF$ 是菱形，$\therefore DE=CD=2AD$，$CE\perp DF$，………1 分

$\because AE=\sqrt{5}AD$，$\therefore AE^2=AD^2+DE^2=5AD^2$，$\therefore AD\perp DE$，

$\because AD\perp CD$，$\therefore AD\perp$ 面 $CDEF$，$\therefore AD\perp CE$，………4 分

$\therefore CE\perp$ 面 ADF，$\therefore CE\perp AF$；………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{DA}|$ 为单位长，建立如图的空间直角坐标系 $D-xyz$，



由题设可得 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$E(0,-1,\sqrt{3})$，

$F(0,1,\sqrt{3})$，$\therefore \overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB}=(\lambda,-\lambda,0)$

$\therefore \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CP}=(\lambda,2-\lambda,0)$，

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 是平面 DFP 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\ \lambda x+(2-\lambda)y=0,\end{cases}$

令 $z=-1$，则 $\begin{cases} y=\sqrt{3}, \\ x=\sqrt{3}(1-\dfrac{2}{\lambda}), \end{cases}$ $\therefore \vec{m}=(\sqrt{3}(1-\dfrac{2}{\lambda}),\sqrt{3},-1)$, ·········9 分

由(Ⅰ)可知 $\overrightarrow{CE}=(0,-3,\sqrt{3})$ 是平面 ADF 的一个法向量,

Q 二面角 $A-DF-P$ 的大小为 $60°$,

$\therefore \cos 60° =|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{CE}|}|=\dfrac{|-4\sqrt{3}|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3(-\dfrac{2}{\lambda})^2+4}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \lambda=\dfrac{2}{3}$. ·········12 分

19. 解：（Ⅰ）由题意得 $z=\ln y=\ln e^{bx+a}=bx+a$，

$\therefore \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iz_i-7\overline{x}\overline{z}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2}=\dfrac{112-7\times4\times3.5}{140-7\times4^2}=0.5$，$\therefore \hat{a}=\overline{z}-\hat{b}\overline{x}=3.5-0.5\times4=1.5$，

$\therefore z$ 关于 x 的线性回归方程为 $z=0.5x+1.5$，···········3 分

$\therefore y$ 关于 x 的回归方程为 $y=e^{0.5x+1.5}$，当 $x=8$ 时，$y=e^{5.5}=244.69$，

$\therefore$ 第 8 天使用扫码支付的人次为 2447；···········6 分

（Ⅱ）由题意得 ξ 的所有取值为 $0.5,0.7,0.9,1$，

$P(\xi=0.5)=\dfrac{1}{3}\times30\%=0.10$，$P(\xi=0.7)=60\%+\dfrac{1}{2}\times30\%=0.75$，

$P(\xi=0.9)=\dfrac{1}{6}\times30\%=0.05$，$P(\xi=1)=10\%=0.10$，

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	0.5	0.7	0.9	1
p	0.10	0.75	0.05	0.10

···········10 分

$\therefore E\xi=0.5\times0.10+0.7\times0.75+0.9\times0.05+1\times0.10=0.72$. ···········12 分

20.解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} 2a+2c=6, \\ \dfrac{1}{2}\times2bc=\sqrt{3}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ ··············3 分

$\therefore \begin{cases} c=1, \\ b=\sqrt{3}, \\ a=2, \end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；···········6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $A(-2,0),B(2,0)$，$F_2(1,0)$，设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases} x=mx+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(4+3m^2)y^2+6my-9=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{6m}{4+3m^2}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{4+3m^2}$，$\therefore my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$，…………9 分

Q 直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BN 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

$\therefore \dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，$\therefore \dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\dfrac{my_1y_2+3y_2}{my_1y_2-y_1}=3$，

$\therefore x=4$，$\therefore$ 直线 AM 与 BN 的交点在直线 $x=4$ 上. …………12 分

21.(Ⅰ)解：由题意得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)=-\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}$，$x>0$，………2 分

（1）当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 则 $0<x<\dfrac{1}{a}$；令 $f'(x)<0$ 则 $x>\dfrac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减；…………6 分

(Ⅱ)证明：当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，Q $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}-a(x_2+x_1)+(2-a)$，

$f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-2ax_0+(2-a)$

$\therefore \dfrac{1}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}-a(x_2+x_1)=\dfrac{1}{x_0}-2ax_0$，……………7 分

Q $f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})-f'(x_0)=\dfrac{2}{x_2+x_1}-a(x_2+x_1)-(\dfrac{1}{x_0}-2ax_0)=\dfrac{2}{x_2+x_1}-\dfrac{1}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}$

$=\dfrac{1}{x_2-x_1}[\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}-\ln\dfrac{x_2}{x_1}]=\dfrac{1}{x_2-x_1}[\dfrac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}-\ln\dfrac{x_2}{x_1}]$，……………9 分

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，$g(t)=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$，$t>1$，则 $g'(t)=-\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，$\therefore g(t)<g(1)=0$，

$\therefore f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})-f'(x_0)<0$，$\therefore f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})<f'(x_0)$，……………11 分

设 $h(x)=f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)$，$x>1$，则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2a>-1+1=0$，

$\therefore h(x)=f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}<x_0$. …………12 分

22 解：（Ⅰ）Q $\rho=2\cos\theta$，$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $\therefore (x-1)^2+y^2=1$，

Q α 是曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 的参数，$\therefore$ C_1 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=t^2$，……2 分

Q C_1 与 C_2 有且只有一个公共点，$\therefore |t|=\sqrt{2}-1$ 或 $|t|=\sqrt{2}+1$，

$\therefore C_1$ 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$ 或 $x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$；………5 分

（Ⅱ）Q t 是曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 的参数，$\therefore$ C_1 是过点 $A(0,1)$ 的一条直线，………6 分

设与点 P,Q 相对应的参数分别是 t_1,t_2，把 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $(x-1)^2+y^2=1$ 得

$t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t+1=0$，$\therefore \begin{cases}t_1+t_2=-2\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4}),\\ t_1\cdot t_2=1,\end{cases}$ ………8 分

$\therefore \dfrac{1}{|AP|}+\dfrac{1}{|AQ|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=2\sqrt{2}|\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})|\le 2\sqrt{2}$，

当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$\Delta=4(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-4=4>0$，

$\dfrac{1}{|AP|}+\dfrac{1}{|AQ|}$ 取最大值 $2\sqrt{2}$.………10 分

23（Ⅰ）解：Q $f(x)=|2x-1|+2|x+1|\le 5$，$\therefore |x-\dfrac{1}{2}|+|x+1|\le\dfrac{5}{2}$，

由绝对值得几何意义可得 $x=-\dfrac{3}{2}$ 和 $x=1$ 上述不等式中的等号成立，…………3 分

$\therefore$ 不等式 $f(x)\le 5$ 的解集为 $[-\dfrac{3}{2},1]$；…………5 分

（Ⅱ）由绝对值得几何意义易得 $f(x)=2(|x-\dfrac{1}{2}|+|x+1|)$ 的最小值为 3，

$\therefore 3\le 5+m-m^2$，$\therefore -1\le m\le 2$，$\therefore M=2$，$\therefore a^3+b^3=2$，…………7 分

Q $2=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，$a^2-ab+b^2\ge 0$，$\therefore a+b>0$，…………8 分

Q $2ab\le a^2+b^2$，$\therefore 4ab\le(a+b)^2$，$\therefore ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$，

Q $2=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]\ge\dfrac{1}{4}(a+b)^3$，$\therefore a+b\le 2$，

$\therefore 0<a+b\le 2$. …………10 分