



秘密★启用前

## 理科数学

### 注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置.
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题上无效.
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案用 0.5 mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上.
4. 考试结束后,将本试题和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知函数  $y = \sqrt{x^2 - x}$  的定义域为  $A$ , 则  $\complement_{\mathbf{R}}A =$

- A.  $\{x|x \leq 0\} \cup \{x|x \geq 1\}$       B.  $\{x|x < 0\} \cup \{x|x > 1\}$   
C.  $\{x|0 \leq x \leq 1\}$       D.  $\{x|0 < x < 1\}$

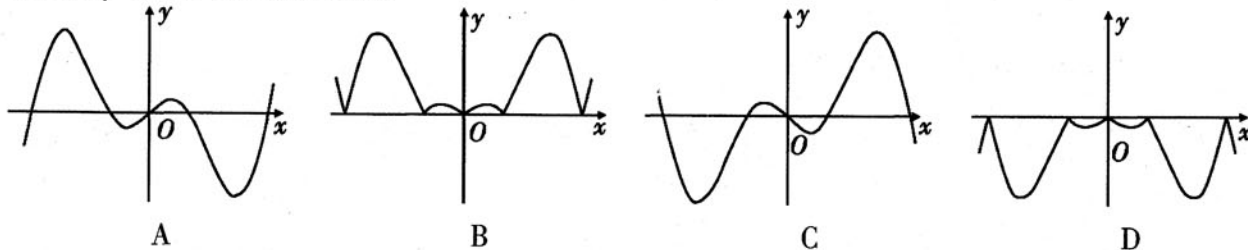
2. 抛物线  $y = 4x^2$  的焦点坐标为

- A.  $(1, 0)$       B.  $(2, 0)$       C.  $(0, \frac{1}{8})$       D.  $(0, \frac{1}{16})$

3. 已知复数  $z = \frac{1+ai}{1+2i}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 为纯虚数, 则实数  $a =$

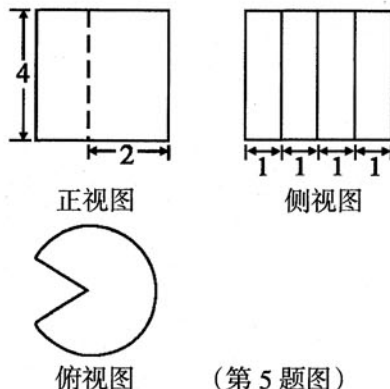
- A. 2      B. -2      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{1}{2}$

4. 函数  $y = x \cos x$  的图象大致为



5. 已知一个几何体的三视图如图所示, 则其体积为

- A.  $12\pi$       B.  $16\pi$   
C.  $\frac{32\pi}{3}$       D.  $\frac{40\pi}{3}$



6. 已知双曲线  $C$  过点  $(1, 3)$ , 其两条渐近线方程为  $y = \pm 2x$ , 则  $C$  的离心率为

- A.  $\sqrt{6}$       B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$   
C.  $\sqrt{5}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(第 5 题图)





7. 中国是发现和研究勾股定理最古老的国家之一, 古代数学家称直角三角形较短的直角边为勾, 另一直角边为股, 斜边为弦, 其三边长组成的一组数据称为勾股数. 现从 1~15 这 15 个数中随机抽取 3 个整数, 则这三个数为勾股数的概率为

- A.  $\frac{1}{910}$       B.  $\frac{3}{910}$       C.  $\frac{4}{455}$       D.  $\frac{6}{455}$

8. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的乘积记为  $T_n$ , 若  $T_2=T_9=512$ , 则  $T_8=$

- A. 1024      B. 2048      C. 4096      D. 8192

9. 函数  $f(x)$  为偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x)=xe^x$ , 则曲线  $y=f(x)$  在  $x=-1$  处的切线方程为

- A.  $2ex+y+e=0$       B.  $2ex-y-e=0$       C.  $2ex+y-3e=0$       D.  $2ex-y+3e=0$

10. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $a_1=-\frac{2}{3}, S_n+\frac{1}{S_n}+2=a_n(n \geq 2)$ , 则下面选项为等差数列的是

- A.  $\{S_n+1\}$       B.  $\{S_n-1\}$   
C.  $\left\{\frac{1}{S_n+1}\right\}$       D.  $\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$

11. 设  $m=\log_{0.3}0.6, n=\frac{1}{2}\log_20.6$ , 则

- A.  $m-n > m+n > mn$       B.  $m-n > mn > m+n$   
C.  $m+n > m-n > mn$       D.  $mn > m-n > m+n$

12. 已知函数  $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$  的图象过两点  $A\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ ,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  内有且只有两个极值点, 且极大值点小于极小值点, 则  $f(x)=$

- A.  $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$       B.  $f(x)=\sin\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)$   
C.  $f(x)=\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)$       D.  $f(x)=\sin\left(9x+\frac{3\pi}{4}\right)$

## 二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $a, b$  满足  $|b|=2|a|=1, a \perp (a-b)$ , 则  $a$  与  $2a+b$  的夹角的余弦值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x-3y+2 \leq 0, \\ 3x-2y+3 \geq 0, \\ x+y-4 \geq 0, \end{cases}$  则  $z=2x+y$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 将 5 名学生分配到 3 个社区参加社会实践活动, 每个社区至少分配一人, 则不同的分配方案有  $\underline{\hspace{2cm}}$  种.(用数字填写答案)

16. 已知线段  $ABC$  平面  $\alpha$ , 点  $O \in$  线段  $AB$ , 满足  $OB=2OA$ . 将点  $A$  绕  $O$  折起到点  $P$  的位置, 使直线  $PB$  与平面  $\alpha$  所成的角  $\theta$  最大, 则  $\tan\theta=\underline{\hspace{2cm}}$ .





三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

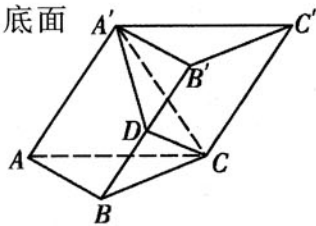
已知向量  $\mathbf{a}=(\sin x, \cos x), \mathbf{b}=(\sqrt{3} \cos x, \cos x), f(x)=\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

(1)求函数  $f(x)=\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  的最小正周期;

(2)在  $\triangle ABC$  中,  $BC=\sqrt{7}, \sin B=3 \sin C$ , 若  $f(A)=1$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

18. (12 分)

在三棱柱  $ABC-A'B'C'$  中,  $AB=BC=CA=AA'$ , 侧面  $ACC'A' \perp$  底面  $ABC, D$  是棱  $BB'$  的中点.



(第 18 题图)

(1)求证:平面  $DA'C \perp$  平面  $ACC'A'$ ;

(2)若  $\angle A'AC=60^\circ$ , 求二面角  $A-BC-B'$  的余弦值.

19. (12 分)

某纺织厂为了生产一种高端布料,准备从 A 农场购进一批优质棉花,厂方技术员从 A 农场存储的优质棉花中随机抽取了 100 处棉花,分别测量了其纤维长度(单位:mm)的均值,收集到 100 个样本数据,并制成如下频数分布表:

长度 (单位:mm)	[23,25)	[25,27)	[27,29)	[29,31)	[31,33)	[33,35)	[35,37)	[37,39)
频数	4	9	16	24	18	14	10	5

(1)求这 100 个样本数据的平均数  $\bar{x}$  和样本方差  $s^2$  (同一组数据用该区间的中点值作代表);

(2)将收集到的数据绘成直方图可以认为这批棉花的纤维长度服从分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu \approx \bar{x}, \sigma^2 \approx s^2$ .

①利用正态分布,求  $P(X > \mu - 2\sigma)$ ;

②纺织厂将 A 农场送来的这批优质棉进行二次检验,从中随机抽取 20 处测量其纤维均值  $y_i (i=1, 2, \dots, 20)$ , 数据如下:

$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$
24.1	31.8	32.7	28.2	28.4	34.3	29.1	34.8	37.2	30.8
$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$	$y_{16}$	$y_{17}$	$y_{18}$	$y_{19}$	$y_{20}$
30.6	25.2	32.9	27.1	35.9	28.9	33.9	29.5	35.0	29.9

若 20 个样本中纤维均值  $Y > \mu - 2\sigma$  的频率不低于①中  $P(X > \mu - 2\sigma)$ , 即可判断该批优质棉花合格, 否则认为农场运送时掺杂了次品, 判断该批棉花不合格. 按照此依据判断 A 农场送来的这批棉花是否为合格的优质棉花, 并说明理由.

附:若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6827, P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9543, \sqrt{12.28} \approx 3.504$





## 20. (12分)

已知动点  $P$  到直线  $l: x=4$  的距离是到点  $F(1,0)$  距离的 2 倍, 记点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ . (1) 求曲线  $C$  的方程;

(2) 记曲线  $C$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点,  $Q(4,0)$ . 设  $M$  是直线  $x=1$  上任意一点, 直线  $MA, MB$  与曲线  $C$  的另一交点分别为  $D, E$ . 求证:  $Q, D, E$  三点共线.

## 21. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln(x+1) - mx (m \in \mathbf{R})$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ , 求实数  $m$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

## 22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=2+2\cos\alpha, \\ y=2\sin\alpha, \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数). 以  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系  $Ox$ .

(I) 求曲线  $C$  的极坐标方程;

(II) 已知  $A, B$  是曲线  $C$  上任意两点, 且  $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ , 求  $\triangle OAB$  面积的最大值.

## 23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数  $f(x) = |2x-3| - |x+1|$ .

(I) 求不等式  $f(x) \leq 6$  的解集;

(II) 集合  $M$  满足: 当且仅当  $x \in M$  时,  $f(x) = |3x-2|$ . 若  $a, b \in M$ , 求证:  $a^2 + b^2 + 2a - 2b < 5$ .

