



2018-2019 学年度高三适应性(三)

理科数学参考答案及解析

一、选择题

1. D 【解析】由已知 $A = \{x | x \leq 0\} \cup \{x | x \geq 1\}$, 故 $\complement_{\mathbb{R}}A = \{x | 0 < x < 1\}$, 故选 D.
2. D 【解析】抛物线 $y = 4x^2$ 的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{4}y$, 故其焦点坐标为 $(0, \frac{1}{16})$, 故选 D.
3. D 【解析】 $z = \frac{(1+ai)(1-2i)}{5} = \frac{1}{5}[(1+2a) + (a-2)i]$, 由已知得 $1+2a=0$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 故选 D.
4. A 【解析】函数 $y = x \cos x$ 为奇函数, 故排除 B、D, 当 x 取很小的正实数时, 函数值大于零, 故选 A.
5. D 【解析】由三视图可知, 该几何体为圆柱挖去其 $\frac{1}{6}$ 后的剩余部分,

该圆柱的底面半径为 2, 高为 4. 故其体积为圆柱体积的 $\frac{5}{6}$,

$$V = \frac{5}{6} \pi R^2 h = \frac{5}{6} \times 16\pi = \frac{40\pi}{3}, \text{ 故选 D.}$$

6. D 【解析】设双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = \lambda (\lambda \neq 0)$, 则 $1 - \frac{9}{4} = \lambda$, 即 $\lambda = -\frac{5}{4}$.

故双曲线的方程为 $\frac{y^2}{5} - \frac{4x^2}{5} = 1$, 故 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 故选 D.

7. C 【解析】从这 15 个数中随机抽取 3 个整数所有基本事件个数为 C_{15}^3 , 其中为勾股数为 $(3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (5, 12, 13)$ 4 个, 故概率为 $P = \frac{4}{C_{15}^3} = \frac{4}{455}$, 故选 C.

8. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $T_2 = T_9$ 得 $a_6^2 = 1$, 故 $a_6 = 1$, 即 $a_1 q^5 = 1$.

又 $a_1 a_9 = a_5^2 q^8 = 512$, 所以 $q^8 = \frac{1}{512}$, 故 $q = \frac{1}{2}$. 所以 $T_8 = T_3 = a_3^2 = (\frac{a_6}{q^3})^2 = 2^2 = 4096$. 故选 C.

9. A 【解析】当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = (x+1)e^x$, 故 $f'(1) = 2e, f(1) = e$. 由函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 故 $f'(-1) = -2e, f(-1) = e$, 所求切线方程为 $y - e = -2e(x+1)$, 即 $2ex + y + e = 0$. 故选 A.

10. C 【解析】由 $S_n + \frac{1}{S_n} + 2 = a_n (n \geq 2)$ 得 $S_n = -\frac{1}{S_{n-1} + 2} (n \geq 2)$. $S_1 = -\frac{2}{3}, S_2 = -\frac{3}{4}, S_3 = -\frac{4}{5}$.

故 $S_1 + 1 = \frac{1}{3}, S_2 + 1 = \frac{1}{4}, S_3 + 1 = \frac{1}{5}, \frac{1}{S_1 + 1} = 3, \frac{1}{S_2 + 1} = 4, \frac{1}{S_3 + 1} = 5$, 故选 C.

11. A 【解析】 $m = \log_{0.3} 0.6 > \log_{0.3} 1 = 0, n = \frac{1}{2} \log_2 0.6 < \frac{1}{2} \log_2 1 = 0, mn < 0$.

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \log_{0.6} 0.3 + \log_{0.6} 4 = \log_{0.6} 1.2 < \log_{0.6} 0.6 = 1$, 即 $\frac{m+n}{mn} < 1$, 故 $m+n > mn$.

又 $(m-n) - (m+n) = -2n > 0$, 所以 $m-n > m+n$.

故 $m-n > m+n > mn$, 所以选 A.

12. C 【解析】由已知得 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$.

当 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin(\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4}) = 0$, 所以 $\omega = -1 + 4k, (k \in \mathbb{N}^*)$.

若 $\omega = 3$ 时, $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 有一个极大值点, 不符合题意;

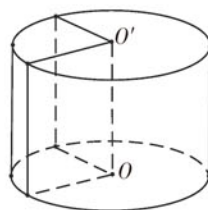
若 $\omega = 7$ 时, $f(x) = \sin(7x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内极大值点为 $\frac{\pi}{28}$, 小于极小值点 $\frac{5\pi}{28}$, 符合题意;

当 $\omega = \frac{3\pi}{4}$ 时, $\sin(\frac{\pi}{4}\omega + \frac{3\pi}{4}) = 0$, 所以 $\omega = -3 + 4k, (k \in \mathbb{N}^*)$.

若 $\omega = 5$ 时, $f(x) = \sin(5x + \frac{3\pi}{4})$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 有一个极小值点, 不符合题意;

若 $\omega = 9$ 时, $f(x) = \sin(9x + \frac{3\pi}{4})$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 极小值点 $\frac{\pi}{12}$ 和极大值点 $\frac{7\pi}{36}$, 不符合题意.

综合上述: 应选 C.



(第 5 题答图)





二、填空题

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由 $a \perp (a-b)$ 得 $a \cdot b = \frac{1}{4}$, $|2a+b| = \sqrt{4a^2+4a \cdot b+b^2} = \sqrt{3}$.

$$a \text{ 与 } 2a+b \text{ 的夹角的余弦值为 } \cos\alpha = \frac{a \cdot (2a+b)}{|a||2a+b|} = \frac{2a^2+a \cdot b}{|a||2a+b|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

14. 5 【解析】不等式满足的平面区域如图阴影部分, 其中 $A(1,3), B(2,2)$, 当动直线过点 A 时, $z_{\min}=5$.

15. 150 【解析】当一社区3人其他社区各一人时, 方案有 $C_3^3 A_2^2 = 60$ (种); 当一社区1人其他社区各2人时,

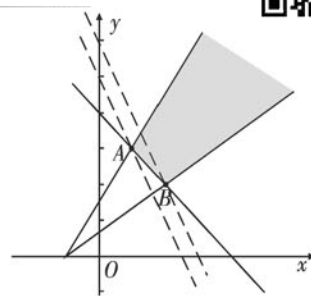
$$\text{方案有 } \frac{C_3^1 C_2^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90 \text{ (种),}$$

故不同的分配方案共有150种.

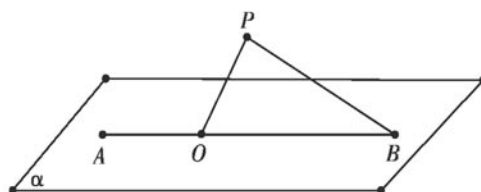
16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】当平面 $POB \perp \alpha$, 且 $OP \perp PB$ 时,

直线 PB 与 α 平面所成的角 θ 最大,

$$\text{此时 } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



(第14题答图)



(第16题答图)

三、解答题

(一)必考题

17. 解: (1) $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$ 2分

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}. \text{ 4分}$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ 6分

(2) 由题设可得 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $0 < A < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{6} < 2A + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6}$,

$$\text{所以 } 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \text{ 故 } A = \frac{\pi}{3}. \text{ 8分}$$

设角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

$$\text{所以 } a = BC = \sqrt{7}, \text{ 又 } \sin B = 3 \sin C, \text{ 所以 } b = 3c. \text{ 10分}$$

$$\text{故 } 7 = 9c^2 + c^2 - 3c^2, \text{ 解得 } c = 1.$$

$$\text{所以 } b = 3, \Delta ABC \text{ 的周长为 } 4 + \sqrt{7}. \text{ 12分}$$

18. 解: (1) 取 $AC, A'C'$ 的中点 O, F , 连接 OF 与 $A'C'$ 交于点 E , 连接 $DE, OB, B'F$,

则 E 为 OF 的中点, $OF \parallel AA' \parallel BB'$, 且 $OF = AA' = BB'$, 所以 $BB'FO$ 是平行四边形.

又 D 是棱 BB' 的中点, 所以 $DE \parallel OB$ 3分

侧面 $AA'C'C \perp$ 底面 ABC , 且 $OB \perp AC$, 所以 $OB \perp$ 平面 $ACC'A'$.

所以 $DE \perp$ 平面 $ACC'A'$.

又 $DE \subset$ 平面 $DA'C$, 所以平面 $DA'C \perp$ 平面 $ACC'A'$ 6分

(2) 连接 $A'O$, 因为 $\angle A'AC = 60^\circ$, 所以 $\Delta A'AC$ 是等边三角形.

$$\text{设 } AB = BC = CA = AA' = 2.$$

故 $A'O \perp$ 底面 ABC , 由已知 $A'O = OB = \sqrt{3}$,

以 OB, OC, OA' 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.

$$\text{则 } A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), A'(0, 0, \sqrt{3}). \text{ 8分}$$

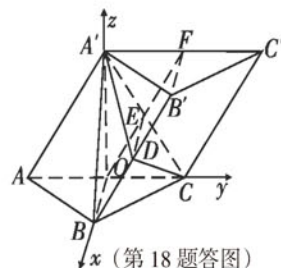
$$\vec{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \vec{BB'} = \vec{AA'} = (0, 1, \sqrt{3}).$$

设平面 $BCC'B'$ 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\text{则 } m \cdot \vec{BC} = 0, m \cdot \vec{BB'} = 0.$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0, \\ y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 取 } x = 1, y = \sqrt{3}, z = -1.$$

$$\text{所以 } m = (1, \sqrt{3}, -1). \text{ 10分}$$



(第18题答图)





又平面ABC的一个法向量为 $n=(0,0,1)$,

$$\text{故} \cos \langle m, n \rangle = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

二面角 $A-BC-B'$ 为钝角,所以其余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12分

19. 解: (1) $\bar{x} = \frac{1}{100} (4 \times 24 + 9 \times 26 + 16 \times 28 + 24 \times 30 + 18 \times 32 + 14 \times 34 + 10 \times 36 + 5 \times 38) = 31,$

$$s^2 = \frac{1}{100} (4 \times 7^2 + 9 \times 5^2 + 16 \times 3^2 + 24 \times 1 + 18 \times 1 + 14 \times 3^2 + 10 \times 5^2 + 5 \times 7^2) = 12.28. \dots\dots\dots 6分$$

(2) 棉花的纤维长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu=31, \sigma \approx \sqrt{12.28} \approx 3.504,$

① 利用正态分布, 则 $P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - \frac{1}{2} (1 - 0.9543) = 0.97715. \dots\dots\dots 9分$

② $\mu - 2\sigma = 31 - 2 \times 3.504 \approx 23.992,$ 故 $f(X > \mu - 2\sigma) = f(Y > 23.992) = 1.$
故满足条件, 所以认为该批优质棉花合格. 12分

20. 解: (1) 设动点P的坐标为 $(x, y).$

则P到直线 $l: x=4$ 的距离为 $d=|x-4|,$ 又 $|PF| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$

由已知得 $d=2|PF|,$ 所以 $|x-4| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$ 2分

化简得: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$ 故曲线C的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$ 4分

(2) 由(1)可得 $A(-2, 0), B(2, 0),$ 设点M的坐标为 $(1, m).$

直线MA的方程为: $y = \frac{m}{3}(x+2),$

将 $y = \frac{m}{3}(x+2)$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立消去y整理得:

$$(4m^2 + 27)x^2 + 16m^2x + 16m^2 - 108 = 0,$$

设点D的坐标为 $(x_D, y_D),$ 则 $-2x_D = \frac{16m^2 - 108}{4m^2 + 27},$

故 $x_D = \frac{54 - 8m^2}{4m^2 + 27},$ 则 $y_D = \frac{m}{3}(x_D + 2) = \frac{36m}{4m^2 + 27}.$ 7分

直线MB的方程为: $y = -m(x-2),$

将 $y = -m(x-2)$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立消去y整理得:

$$(4m^2 + 3)x^2 - 16m^2x + 16m^2 - 12 = 0,$$

设点E的坐标为 $(x_E, y_E),$ 则 $2x_E = \frac{16m^2 - 12}{4m^2 + 3},$

故 $x_E = \frac{8m^2 - 6}{4m^2 + 3},$ 则 $y_E = -m(x_E - 2) = \frac{12m}{4m^2 + 3}.$ 10分

$$QD \text{ 的斜率为 } k_1 = \frac{y_D}{x_D - 4} = \frac{36m}{54 - 8m^2 - 4(4m^2 + 27)} = -\frac{6m}{4m^2 + 9};$$

$$QE \text{ 的斜率为 } k_2 = \frac{y_E}{x_E - 4} = \frac{12m}{8m^2 - 6 - 4(4m^2 + 3)} = -\frac{6m}{4m^2 + 9}.$$

因为 $k_1 = k_2,$ 所以Q, D, E三点共线. 12分

21. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty).$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - m = \frac{-mx + 1 - m}{x+1}. \dots\dots\dots 2分$$

当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - m > 0, f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增; 3分

当 $m > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0,$ 得 $x = -1 + \frac{1}{m}.$

若 $x \in (-1, -1 + \frac{1}{m}), f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

若 $x \in (-1 + \frac{1}{m}, +\infty), f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

综上: 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, -1 + \frac{1}{m})$ 上单调递增, 在 $(-1 + \frac{1}{m}, +\infty)$ 上单调递减. 5分

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ 等价于: 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(x+1) - mx - \frac{1}{2}x^2 \leq 0.$





令 $g(x) = \ln(x+1) - mx - \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0)$,

$g'(x) = \frac{1}{x+1} - m - x = \frac{-x^2 - (m+1)x + 1 - m}{x+1}$ 6分

令 $h(x) = -x^2 - (m+1)x + 1 - m$,

判别式 $\Delta = (m+1)^2 + 4(1-m) = m^2 - 2m + 5 > 0$,

又 $h(-1) = -1 + (m+1) + 1 - m = 1 > 0$.

故存在 $x_0 \in (-1, +\infty)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 此时 $m = \frac{1}{x_0+1} - x_0$ 8分

随 x 的变化 $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-1, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极大值	↘

..... 10分

① 当 $x_0 \in (-1, 0]$ 时, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x) \leq g(0) = 0$ 满足条件.

此时 $m = \frac{1}{x_0+1} - x_0 \in [1, +\infty)$.

② 当 $x_0 \in (0, +\infty)$ 时, $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, $g(x) > g(0) = 0$ 不满足条件.

综上所述: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \frac{1}{2}x^2$, 实数 m 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 12分

(二) 选考题

22. 解: (I) 消去参数 α , 得到曲线 C 的标准方程为: $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 2分

故曲线的极坐标方程为: $\rho = 4\cos\theta$ 5分

(II) 极坐标系 Ox 中, 不妨设 $A(\rho_1, \theta_0), B(\rho_2, \theta_0 + \frac{\pi}{4})$, 其中 $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

由 (I) 知: $\rho_1 = 4\cos\theta_0, \rho_2 = 4\cos(\theta_0 + \frac{\pi}{4})$.

$\triangle OAB$ 面积 $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}\cos\theta_0\cos(\theta_0 + \frac{\pi}{4})$, 8分

$S = 4\cos^2\theta_0 - 4\sin\theta_0\cos\theta_0 = 2\cos 2\theta_0 - 2\sin 2\theta_0 + 2 = 2\sqrt{2}\cos(2\theta_0 + \frac{\pi}{4}) + 2$.

当 $2\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$ 时, 即 $\theta_0 = -\frac{\pi}{8}$, $\cos(2\theta_0 + \frac{\pi}{4})$ 有最大值 1, 此时 $S_{\max} = 2 + 2\sqrt{2}$.

故 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$ 10分

23. 解: (I) $f(x) = |2x-3| - |x+1| = \begin{cases} -x+4, & x < -1 \\ -3x+2, & -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x-4, & x > \frac{3}{2} \end{cases}$ 2分

当 $x < -1$ 时, $-x+4 \leq 6$, 得 $x \geq -2$, 故 $-2 \leq x < -1$;

当 $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 时, $-3x+2 \leq 6$, 得 $x \geq -\frac{4}{3}$, 故 $-1 \leq x < \frac{3}{2}$;

当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $x-4 \leq 6$, 得 $x \leq 10$, 故 $\frac{3}{2} < x \leq 10$.

综上可知, 不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 10\}$ 5分

(II) 由绝对值不等式的性质可知: $f(x) = |2x-3| - |x+1| \leq |3x-2|$,

即 $|(3x-2) + (-x-1)| \leq |3x-2| + |x+1|$, 由等号成立的条件可知,

$(3x-2)(-x-1) \geq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$, 故 $M = [-1, \frac{2}{3}]$ 8分

$a^2 + b^2 + 2a - 2b = (a+1)^2 + (b-1)^2 - 2$,

$a, b \in M$, 所以 $(a+1)^2 \leq \frac{25}{9}, (b-1)^2 \leq 4$.

所以 $a^2 + b^2 + 2a - 2b = (a+1)^2 + (b-1)^2 - 2 \leq \frac{25}{9} + 4 - 2 < 5$.

故 $a^2 + b^2 + 2a - 2b < 5$ 10分

