太原市 2017~2018 学年第二学期高二年级期中考试

数学（理）试卷分析

一、**选择题**：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分

1. 复平面内，点 $(0,-1)$ 表示的复数为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. i　　D. $-i$

考点：复数的几何意义

答案：D

解析：

点 $(0,-1)$ 表示的复数为 $0+(-1)i=-i$.

故选 D

2. 已知函数 $f(x)=\sin x-x$，则 $f'(0)=$（　　）

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. -2

考点：导数的运算

答案：A

解析：

因为 $f'(x)=\cos x-1$，所以 $f'(0)=\cos 0-1=0$.

故选 A

3. 下列结论正确的是（　　）

A. 归纳推理是由一般到个别的推理

B. 演绎推理是由特殊到一般的推理

C. 类比推理是由特殊到特殊的推理

D. 合情推理是演绎推理

考点：推理的分类

答案：C

解析：

A. 归纳推理是由特殊到一般的推理，错；B. 演绎推理是由一般到特殊的推理，错；D. 合情推理和演绎推理是两种不同的推理，错.

故选 C

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

4．已知 $ABCD$ 是复平面内的平行四边形，A，B，C 三点对应的复数分别是 $-2+i$，$1-i$，$2+2i$，则点 D 对应的复数为（　　）

A． $4-i$　　　　B． $-3-2i$

C． 5　　　　D． $-1+4i$

考点：复数的几何意义

答案：D

解析：设点 D(x,y)，由 $ABCD$ 为平行四边形对角线相互平分，

得 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{x+1}{2},\dfrac{y-1}{2}\right)$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$

故点 D 对应的复数为 $-1+4i$

5．已知推理："因为所有的金属都能够导电，而铜能导电，所以铜是金属"，则下列结论正确的是

A． 此推理大前提错误　　　　B． 此推理小前提错误

C． 此推理的推理形式错误　　　　D． 此推理无错误

考点：演绎推理

答案：C

解析：本题的大小前提都没错误，推理形式错误．
故选 C．

6．用反证法证明"三角形的三个内角中至少有一个不大于 $60°$"时的假设为（　　）

A． 三个内角中至多有一个不大于 $60°$

B． 三个内角中至少有两个不大于 $60°$

C． 三个内角都不大于 $60°$

D． 三个内角都大于 $60°$

考点：古典概型

答案：D

解析：

"三角形的三个内角中至少有一个不大于 $60°$"等价于"三角形的三个内角中有一个、两个或三个不大于 $60°$"，所以用反证法时的假设为"三个内角都大于 $60°$"．

故选 D

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

7. 复平面内，若与复数 $(m^2-5m+4)+(m^2-2m)i$ 对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是（ ）

A．$(1,2)$ B．$(0,1)$ C．$(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ D．$(2,4)$

考点：复数的几何意义

答案：B

解析：

因为复数与 $(m^2-5m+4)+(m^2-2m)i$ 对应的点在第四象限，则 $\begin{cases} m^2-5m+4>0 \\ m^2-2m<0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m<1\text{或}m>4 \\ 0<m<2 \end{cases}$，即实数 m 的取值范围是 $(0,1)$.

故选 B

8. 观察下列各式：$7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$，……，则 7^{2018} 的末两位数字为（ ）

A．01 B．43 C．07 D．49

考点：归纳推理

答案：D

解析：由题 $7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$，得二次的末两位为 49，三次的末两位为 43，四次的末两位为 01，那么在四次基础上乘 7 得五次的末两位为 07，分析可得规律：n 从 2 开始，四个一组，7^n 的末两位数字依次为：49，43，01，07.

则 7^{2018} 的末两位与 7^2 对应，其末两位数字为 49.

故选 D

9. 函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 的单调递减区间是（ ）

A．$(-\infty,1)$ B．$(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ C．$(-\infty,0)$ D．$(0,1)$

考点：利用导数求单调区间

答案：B

解析：函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 求导可得：$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}$，

令 $f'(x)<0$，且 $x\neq 0$，解得 $x<0或0<x<1$

则函数 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,0)和(0,1)$.

故选 B

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-3x+b$ 在 $x=-1$ 处的切线平行于 x 轴，则 $f(x)$ 的极大值与极小值的差为（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

考点： 利用导数求极值

答案： C

解析： $f'(x)=3x^2+2ax-3=0$，由题知 $f'(1)=0$，即 $3-2a-3=0$，解得 $a=0$，

所以 $f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1或x=1$，

当 $x=-1$时，$f(x)$ 取极大值，$f(-1)=2+b$，

当 $x=1$时，$f(x)$ 取极小值，$f(1)=-2+b$，

$\therefore(2+b)-(-2+b)=4$.

故选 C

工大教育
——做最感动客户的专业教育组织

11. 在直角坐标平面内，由曲线 $xy=1,y=x,x=3$ 和 x 轴所围成的封闭图形的而面积为（　　）

A. $\frac{1}{2}+\ln 3$

B. $4-\ln 3$

C. $1+\ln 3$

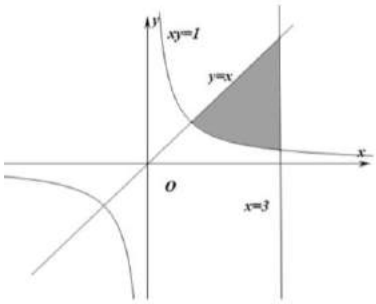
D. $2-\ln 3$

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

考点：定积分的应用

答案： B

解析： 该封闭图形如下图的阴影部分



则此面积可表示为$\int_1^3\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Big|_1^3=\left(\frac{1}{2}\times3^2-\ln3\right)-\left(\frac{1}{2}\times1^2-\ln1\right)=4-\ln3.$

故选 B.

12.已知函数 $f(x)=(2a-1)x-\frac{1}{2}\cos2x-a(\sin x+\cos x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增，则实数 a 的取值范围为

A．$(-\infty,\frac{1}{3}]$　　B．$[\frac{1}{3},1]$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

答案： D

解析： 函数 $f(x)=(2a-1)x-\frac{1}{2}\cos2x-a(\sin x+\cos x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增等价于 $f'(x)=a(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x+(2a-1)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$上大于等于零恒成立，此时可设 $t=\sin x-\cos x$，于是 $\sin x\cos x=1-t^2$，所以也就等价于 $g(t)=-2t^2+at+2a+1\geq0$ 在 $t\in[-1,1]$上恒成立，（此时 t 的范围可由 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 得到）；接下来再根据二次函数零点分布可知道，需要让 $g(t)=-2t^2+at+2a+1$ 的两个零点在区间 $[-1,1]$的两侧，所以只需要让 $\begin{cases}g(1)\geq0\\g(-1)\geq0\end{cases}$，解得 $a\geq1$。

二、填空题： 本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分

13.已知复数 z 满足 $(2-i)z=5$，则复数 z 的共轭复数为____________.

考点： 复数的共轭复数

答案： $2-i$

解析：

由题 $z=\dfrac{5}{2-i}=\dfrac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{5(2+i)}{5}=2+i$

所以 $\bar{z}=2-i$

14.若 $\int_0^m e^x dx=e^2-1$，则实数 $m=$__________.

考点： 定积分求参数

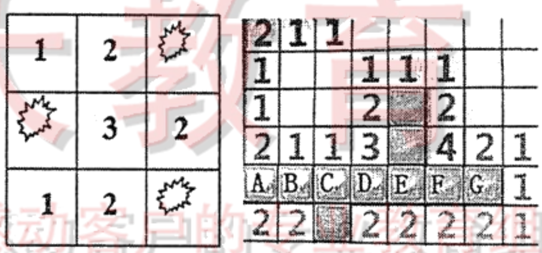
答案： 2

解析：

由 $\int_0^m e^x dx=e^x\big|_0^m=e^m-e^0=e^2-1$

解得 $m=2$

15.“扫雷”游戏，要求游戏者找出所有的雷，游戏规则是：一个方块下面有一个雷或没有雷，如果无雷，掀开方块下面就会标有数字（如果数字是 0，常省略不标），此数字表明它周围的方块中雷的个数（至多八个），如图甲中的“3”表示它的周围八个方块中有且仅有 3 个雷。图乙是小明玩的游戏中的局部，根据图乙中的信息，在 $ABCDEFG$ 这七个方块中，有雷的方块为______



图甲　　图乙

考点： 合情推理

答案： F,G

解析： 合根据图甲的信息，可以确定图乙中一定有雷的为 F,G，B,E 一定无雷，其余三块根据图示信息无法确定，故有雷的方块为 F,G

16. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+2}(x>0)$，观察下列各式：

$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x+2}, f_2(x)=f(f_1(x))=\dfrac{x}{3x+4}, f_3(x)=f(f_2(x))=\dfrac{x}{7x+8},$

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

$f_4(x)=f\left(f_3(x)\right)=\dfrac{x}{15x+16},\cdots,f_n(x)=f\left(f_{n-1}(x)\right),\cdots$，根据以上规律，若 $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2018}$，则整数 n 的最大值为____.

考点： 归纳推理

解析：

由前几式可知，$f_n(x)=\dfrac{x}{(2^n-1)x+2^n}$，，$f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{(2^n-1)\times\frac{1}{2}+2^n}=\dfrac{1}{3\cdot 2^n-1}>\dfrac{1}{2018}$

所以：$2^n<673$，又∵ $2^9<673<2^{10}$，故 n 的最大值为 9.

三、**解答题：** 本大题共 5 小题，共 52 分

17.已知复数 $z_1=a+i$，$z_2=1+bi$，a，b 是实数，i 为虚部单位.

(1) 若 $z_1+z_2=i$，求复数 z_1，z_2；

(2) 若 $z_1\cdot z_2=i$，求复数 z_1，z_2.

考点： 复数的四则运算

答案： (1) $z_1=-1+i$，$z_2=1$；(2) $z_1=i$，$z_2=1$；

解析：

(1) $z_1+z_2=a+i+1+bi=i$

即 $\begin{cases}a+1=0\\b+1=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$

所以 $z_1=-1+i$，$z_2=1$

(2) $z_1\cdot z_2=(a+i)\cdot(1+bi)=i$

即 $\begin{cases}a-b=0\\ab+1=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$

所以 $z_1=i$，$z_2=1$

18.已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

(2) 当 $x\in[-1,2]$时，求 $f(x)$的值域.

考点： 利用导数求函数的单调区间与值域

解析：

(1)由题 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

求得 $f'(x)=x^2-x=x(x-1)$，令 $f'(x)=0$

解得 $x_1=0$ ， $x_2=1$

当 $x<0$时， $f'(x)>0$， $f(x)$单调递增；

当 $0<x<1$时， $f'(x)<0$， $f(x)$单调递减；

当 $x>1$时， $f'(x)>0$， $f(x)$单调递增.

综上， $f(x)$的单调递增区间为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

$f(x)$的单调递减区间为 $(0,1)$

(2)当 $x\in[-1,2]$时， $f(x)$的两个极值点在区间内，

则 $f(x)$的最大值和最小值必在 $x_1=-1$ ， $x_2=0$， $x_3=1$ ， $x_4=2$中的两处取得

$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$ ， $f(0)=0$， $f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$ ， $f(2)=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}=\frac{2}{3}$

所以 $f(x)$的值域为 $\left[-\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right]$

19.已知点 A_1,A_2是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点，$P(x,y)$是椭圆 C上异于 A_1,A_2的点，则直线 PA_1与 PA_2的斜率满足 $k_{PA_1}\times k_{PA_2}=-\frac{b^2}{a^2}$.

(1)类比椭圆的上述结论，写出双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的相应结论,并证明;

(2)请利用(1)的结论解决以下问题：已知点 A_1,A_2是双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$的左右顶点，$P(x,y)$是该双曲线上异于 A_1,A_2的点若直线 PA_1的斜率为 $k_{PA_1}=\frac{1}{2}$，求直线 PA_2的方程.

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站

考点： 类比推理

解析：

（1）$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$

证明：设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左右顶点坐标为 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$

则 $k_{PA_1}=\dfrac{y-0}{x-(-a)}=\dfrac{y}{x+a},k_{PA_2}=\dfrac{y-0}{x-(a)}=\dfrac{y}{x-a}$

又 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$可得：$y^2=\dfrac{x^2}{a^2}b^2-b^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$

故 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{y^2}{x^2-a^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$，得证.

（2）由（1）中的结论 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{b^2}{a^2}$可得：$\dfrac{1}{2}\cdot k_{PA_2}=\dfrac{3}{4}$，解得 $k_{PA_2}=\dfrac{3}{2}$

又 $A_2(2,0)$，故直线 PA_2的方程为：$y=\dfrac{3}{2}(x-2)$

化简可得直线 PA_2的方程为：$3x-2y-6=0.$

20.(A)已知数列$\{a_n\}$满足在 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2(n+1)a_n+1}(n\in N^*)$.

(1)计算 a_2，a_3，a_4，根据计算结果，猜想 a_n 的表达式；

(2)用数学归纳法证明你猜想的结论

考点： 求数列通项，数学归纳法

答案： (1) $a_2=\dfrac{1}{6}$，$a_3=\dfrac{1}{12}$，$a_4=\dfrac{1}{20}$，$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

(2)详见解析

解析： (1)经计算得：$a_2=\dfrac{1}{6}$，$a_3=\dfrac{1}{12}$，$a_4=\dfrac{1}{20}$，猜想：$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}\left(n\in N^*\right)$.

(2)①当 $n=1$时，左边 $a_1=\dfrac{1}{2}$，右边 $\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$，猜想成立.

工大教育
——做最感动客户的专业教育组织

②假设当 $n=k$ 时猜想成立，即 $a_k=\dfrac{1}{k(k+1)}$.

则当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\dfrac{a_k}{2(k+1)\cdot a_{k+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{k\cdot(k+1)}}{2(k+1)\cdot\dfrac{1}{k\cdot(k+1)}+1}$，

$$=\frac{\frac{1}{k\cdot(k+1)}}{\frac{2}{k}+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{k\cdot(k+1)}}{\frac{2+k}{k}}.$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

所以，当 $n=k+1$ 时，猜想也成立.

根据①和②，猜想 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 对于任意 $n\in N^*$ 成立.

20. (B)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$S_n=n^2a_n(n\in N^*)$.

(1) 计算 a_2，a_3，a_4，根据计算结果，猜想 a_n 的表达式；

(2) 用数学归纳法证明你猜想的结论.

考点： 利用数学归纳法求通项公式

解析：

(1)经计算 $a_2=\frac{1}{6}$， $a_3=\frac{1}{12}$， $a_4=\frac{1}{20}$

猜想 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

(2)证明：

①当 $n=1$时，左边 $a_1=\frac{1}{2}$，右边 $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$，猜想成立，

②假设当 $n=k$时， $a_k=\frac{1}{k(k+1)}$，

则当 $n=k+1$时， $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$

$$a_{k+1}=(k+1)^2a_{k+1}-k^2a_k$$

$$=(k+1)^2a_{k+1}-k^2\frac{1}{k(k+1)}$$

即 $\left[(k+1)^2-1\right]a_{k+1}=\frac{k^2}{k(k+1)}$

$$(k^2+2k)a_{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

$$a_{k+1}=\frac{k}{(k+1)(k^2+2k)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

当 $n=k+1$时，猜想成立．

根据①②，猜想 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$对于任意 n^*成立

21.请考生在（A），（B）两个小题中任选一题作答．

（A）已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax(a\in R)$．

（1）谈论函数 $f(x)$的单调性；

（2）当 $a>0$时，证明： $f(x)$在 R上至多有一个零点．

考点： 导数与零点

解析：

（1） $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax(a\in R)$， 故 $f'(x)=(x-1)e^x+e^x-ax=x(e^x-a)$

当 $a<0$时， 令 $f'(x)>0$得 $x>0$，

令 $f'(x)<0$得 $x<0$，

故 $f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$， 单调递减区间是$(0,+\infty)$

当 $a>1$时， 令 $f'(x)>0$得 $x>0$或 $x<\ln a$，

令 $f'(x)<0$得 $\ln a<x<0$，

故 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,\ln a),(0,+\infty)$，

单调递减区间是$(\ln a,0)$

当 $0<a<1$时， 令 $f'(x)>0$得 $x<0$或 $x>\ln a$，

令 $f'(x)<0$得 $0<x<\ln a$，

故 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,0),(\ln a,+\infty)$，

单调递减区间是$(0,\ln a)$

（2）当 $a>0$时，

当 $0<a<1$时， 由（1）知 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,0),(\ln a,+\infty)$，

单调递减区间是$(0,\ln a)$， 而 $f(0)=-1<0$，

$$f(\ln a)=(\ln a-1)a-\frac{1}{2}a(\ln a)^2=\frac{1}{2}a[-(\ln a-1)^2-1]<0$$

当 $x\to+\infty$， $f(x)\to+\infty$， 故只有一个零点；

当 $a>1$时， 由（1）知 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,\ln a),(0,+\infty)$，

单调递减区间是$(\ln a,0)$，$f(0)=-1<0$，

$$f(\ln a)=(\ln a-1)a-\frac{1}{2}a(\ln a)^2=\frac{1}{2}a[-(\ln a-1)^2-1]<0$$

当 $x\to+\infty$， $f(x)\to+\infty$， 故只有一个零点；

工大教育
做最感动客户的专业教育组织

综上所述，$f(x)$在R上至多有一个零点.

（B）已知函数 $f(x)=(x-1)e^{x}-\dfrac{1}{2}ax(a\in R)$.

（1）谈论函数$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$在有两个零点，求实数a的取值范围.

考点： 导数与零点

解析：

（1）$f(x)=(x-1)e^{x}-\dfrac{1}{2}ax(a\in R)$，故 $f'(x)=(x-1)e^{x}+e^{x}-ax=x(e^{x}-a)$

当$a<0$时，令$f'(x)>0$得$x>0$，

令$f'(x)<0$得$x<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(0,+\infty)$，单调递减区间是$(0,+\infty)$

当$a>1$时，令$f'(x)>0$得$x>0$或$x<\ln a$，

令$f'(x)<0$得$\ln a<x<0$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,\ln a),(0,+\infty)$，

单调递减区间是$(\ln a,0)$

当$0<a<1$时，令$f'(x)>0$得$x<0$或$x>\ln a$，

令$f'(x)<0$得$0<x<\ln a$，

故$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,0),(\ln a,+\infty)$，

单调递减区间是$(0,\ln a)$

（2）当$a>0$时，

当$0<a<1$时，由（1）知$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,0),(\ln a,+\infty)$，

单调递减区间是$(0,\ln a)$，而$f(0)=-1<0$，

$f(\ln a)=(\ln a-1)a-\frac{1}{2}a(\ln a)^2=\frac{1}{2}a[-(\ln a-1)^2-1]<0$

当 $x\to+\infty$， $f(x)\to+\infty$，故只有一个零点；

当 $a>1$时，由（1）知 $f(x)$的单调递增区间是 $(-\infty,\ln a),(0,+\infty)$，

单调递减区间是 $(\ln a,0)$，$f(0)=-1<0$，

$f(\ln a)=(\ln a-1)a-\frac{1}{2}a(\ln a)^2=\frac{1}{2}a[-(\ln a-1)^2-1]<0$

当 $x\to+\infty$， $f(x)\to+\infty$，故只有一个零点；

综上所述，当 $a>0$时，$f(x)$在 R上至多有一个零点.

当 $a<0$时， $f(x)$的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,+\infty)$,

$f(0)=-1<0$;当 $x\to+\infty$， $f(x)\to+\infty$;当 $x\to-\infty$， $f(x)\to+\infty$;

故当 $a<0$时有两个零点.

工大教育
——做最感动客户的专业教育组织

更多教育资讯及教育动态，请关注工大教育官方网站