2016~2017 学年第二学期高二年级阶段性测试
数学试卷分析（理科）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.在每小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求，请将其字母标号填入下表相应位置）

1.复数 $2-i$ 的共轭复数是　　（　　）

A.$2+i$　　B. $-2+i$　　C.$-2-i$　　D.$1+2i$

答案： A
解析： 利用共轭复数的定义即可得出答案为 A.

2.下列说法正确的是　　（　　）

A.类比推理、归纳推理、演绎推理都是合情推理
B.合情推理得到的结论一定是正确的
C.合情推理得到的结论不一定正确
D.归纳推理得到的结论一定是正确的

答案： C
解析： 合情推理的结论不一定正确.

3.已知函数 $f(x)=2e^{x}$，则　　（　　）

A. $f'(x)=f(x)+2$　　B. $f'(x)=f(x)$　　C. $f'(x)=3f(x)$　　D. $f'(x)=2f(x)$

答案： B

解析： $f'(x)=2e^{x}=f(x)$，所以选 B.

4.已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(3,4)$，复数 z 的共轭复数为 $\overline{z}$，那么 $z\cdot\overline{z}$ 等于(　　)

A. 5　　B. -7　　C. 12　　D. 25

答案： D

解析： $z=3+4i$，$\overline{z}=3-4i$，$z\cdot\overline{z}=(3+4i)(3-4i)=9-16i^{2}=25.$

5.已知函数 $f(x)=x^{2}+bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极值 -1，那么 $f(x)=$　　（　　）

A. $x^{2}-2x-4$　　B. $x^{2}+x-1$
C. $x^{2}+2x$　　D. $x^{2}-2$

答案:C

解析：$\because$函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 在 $x=-1$ 处取得极值 -1，

$\therefore f'(-1)=0. \because f'(x)=2x+b \Rightarrow b=2$，

$f(-1)=1-2+c=-1 \Rightarrow c=0, \therefore f(x)=x^2+2x$.

6．利用反证法证明："若 $x^2+y^2=0$，则 $x=y=0$"时，假设为 (　　)

A. x,y 都不为 0　　B. $x\neq y$ 且 x,y 都不为 0

C. $x\neq y$ 且 x,y 不都为 0　　D. x,y 不都为 0

答案:D

解析："$x=y=0$"的否定为："x,y 不都为 0".

7．曲线 $y=-\ln(2x+$ 在点 (0，2处的切线与直线 $y=0$ 和 $y=2x$ 围成的三角形的面积为 (　　)

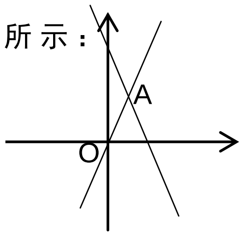
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

答案:B

解析：$\because y'=-\frac{2}{2x+1}$，$\therefore$ 曲线 $y=-\ln(2x+1)+2$ 在点 $(0,2)$ 处的切线斜率为 $k=-2$，

直线方程为 $y=-2x+2$，三条直线围成的三角形如图 ΔOAB 所示：

$A(\frac{1}{2},1)$，$\therefore S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.



8.给出如下"三段论"的推理过程：

因为对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 是增函数，…………………………大前提

而 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 是对数函数，…………………………………………小前提

所以 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 是增函数……………………………………………结论

则下列说法正确的是 (　　)

A.推理形式错误　　　　B.大前提错误

C.小前提错误　　　　D.大前提和小前提都错误

答案： B

解析： 当 $0<a<1$ 时，该函数为减函数，所以这个大前提就是错误的，进而导致结论错误.

9. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=$ (　　)

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

答案： B

解析： $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ 可表示为 $x^2+y^2=1(y\geq 0)$ 与 x 轴围成的面积，即 $\frac{1}{2}\times\pi\times 1=\frac{\pi}{2}$.

10.已知复数 $2i-3$ 是方程 $2x^2+px+q=0$ 的一个根，则实数 p,q 的值分别为 (　　)

A. 12, 0　　B. 24, 26　　C. 12, 26　　D. 6, 8

答案： C

解析： $2i-3$ 代入可得：$2(2i-3)^2+p(2i-3)+q=0$，整理得：$10-3p+q+(2p-24)i=0$，所以，$p=12$，$q=26$.

11.已知函数 $f_0(x)=\sin x+\cos x$，$f_1(x)=f_0'(x)$，$f_2(x)=f_1'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，$n\in N$，那么 $f_{2017}(x)=$ (　　)

A. $\cos x-\sin x$　　B. $\sin x-\cos x$　　C. $\sin x+\cos x$　　D. $-\sin x-\cos x$

答案： A

解析： $f_1(x)=\cos x-\sin x$，$f_2(x)=-\sin x-\cos x$，$f_3(x)=-\cos x+\sin x$，$f_4(x)=\sin x+\cos x$，$f_5(x)=\cos x-\sin x$，发现以 4 为周期，$2017=4\times 504+1$，所以 $f_{2017}(x)=\cos x-\sin x$.

12.设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k$，$k\in N^*$，若函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值，则 k 的最小值为

(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

答案: B

解析： 此题最简便的方法就是将选项逐一代入进行验证，当 $k=1$ 时，$f(x)=(e^x-1)(x-1)$，$f'(x)=xe^x-1$，此时 $f'(1)=e-1\neq 0$，所以可知不可能在 $x=1$ 处取到极小值；当 $k=2$ 时，$f(x)=(e^x-1)(x-1)^2$，$f'(x)=(x-1)(xe^x+e^x-2)$，此时 $f'(1)=0$，而且对于 $x-1$，x 大于 1 的时候大于零，x 小于 1 的时候小于零，对于 xe^x+e^x-2，x 大于 1 的时候大于零，x 小于 1 的时候也大于零，所以 $f'(x)$ 在 $x=1$ 的两侧是左负右正，$f(x)$ 就是先减后增，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可以取到极小值，而且 2 又是最小的正整数，故选 B.

二、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.把答案填在题中横线上）

13.复数 $z=(1+i)+(-2+2i)$ 在复平面内对应的点位于第________象限.

答案: 二

解析: $z=(1+i)+(-2+2i)=-1+3i$，在复平面内对应的点为 $(-1,3)$，在第二象限.

14. 已知 $f(x)=x+$ ，那么 $f'(0)=$ _____.

答案: 2

解析： $f'(x)=1+\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1+1=2.$

15. 我们知道：在长方形 $ABCD$ 中，如果设 $AB=a,BC=b,$ 那么长方形 $ABCD$ 的外接圆的半径 R 满足：$4R^2=a^2+b^2$.类比上述结论回答：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，如果设 $AB=a$，$BC=b$，$AA_1=c$，那么长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径 R 满足的关系式是________.

答案：$4R^2=a^2+b^2+c^2$.

解析：长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径 R 为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体对角线的一半.

16. 若函数 $f(x)=x^3+(k$ 在区间 $(0,2)$ 上不单调，则实数 k 的取值范围为__________.

答案：$(-5,-2)$

解析： 函数 $f(x)=x^3+(k-1)x^2+(k+5)x-1$ 在区间 $(0,2)$ 上不单调就等价于 $f'(x)=3x^2+2(k-1)x+k+5$ 在 $(0,2)$ 上有异号的零点，那么接下来可以用两种方法处理，一是利用二次函数零点的分布，二是可以利用参变分离求交点，两种方法都可以得到 $(-5,-2)$ 的结果.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 48 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 8 分）

已知 $z_1=1-i,z_2=2+2i$.

(1) 求 $z_1\cdot z_2$；

(2) 若 $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$，求 z.

解析：(1) $z_1\cdot z_2=(1-i)(2+2i)=2+2i-2i-2i^2=2+2=4$.

(2) $$z=\frac{1}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{4}{3+i}=\frac{6-2i}{5}=\frac{6}{5}-\frac{2}{5}i.$$

18.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=x^3-2x^2-4x$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,4]$ 上的最大值和最小值.

解析：(1) $f'(x)=3x^2-4x-4$，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=2$

所以当 $x\in(-\infty,-\frac{2}{3})$，$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-\frac{2}{3},2)$，$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(2,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

综上所述：函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ 和 $(2,+\infty)$

单调递减区间为 $\left(-\frac{2}{3},2\right)$.

(2) $f(-1)=1$; $f(-\frac{2}{3})=\frac{40}{27}$; $f(2)=-8$; $f(4)=16$

结合（1）可得如下表格：

x	-1	$(-1,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},2)$	2	$(2,4)$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	单增	$\frac{40}{27}$	单减	-8	单增	16

由上可知，当 $x\in[-1,4]$，$f_{max}=f(4)=16$; $f_{min}=f(2)=-8$.

19.（本小题满分10分）已知函数 $f(x)=x^3+$

(1) 用分析法证明：$f(x)\geq 1-x+x^2$；

(2) 证明：$f(x)>\frac{3}{4}$.

解析：(1) 证明：要证明 $x^3+\frac{1}{x+1}\geq 1-x+x^2$ 成立

只需证 $\frac{1}{x+1}\geq 1-x+x^2-x^3$ 成立

即只需证 $\frac{1}{x+1}\geq\frac{1-(-x)^4}{1-(-x)}$ 成立

即只需证 $\frac{1}{x+1}\ge\frac{1-x^4}{1+x}$ 成立

由 $x\in[0,1]$ 可得上式显然成立，故得证.

(2)证明：由(1)可得 $f(x)\ge 1-x+x^2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

又当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^3+\frac{2}{3}=\frac{19}{24}>\frac{3}{4}$，即等号不成立.

故 $f(x)>\frac{3}{4}$，得证.

20.（本小题满分10分）

说明：请考生在(A)，(B)两小题中任选一题作答.

(A)已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|\frac{a_n+2}{a_n-1}|$，其中 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2}{a_n+1}$.

(1) 求 b_1，b_2，b_3，并猜想 b_n 的表达式(不必写出证明过程)；

(2) 由(1)写出数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，并用数学归纳法证明.

解析：(1) $a_1=2$，$b_1=|\frac{a_1+2}{a_1-1}|=4$；$a_2=\frac{2}{3}$，$b_2=|\frac{a_2+2}{a_2-1}|=8$；$a_3=\frac{6}{5}$，$b_3=|\frac{a_3+2}{a_3-1}|=16$.

猜想：$b_n=2^{n+1}$.

(2) $S_n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}=2^{n+2}-4$，

当 $n=1$ 时，$S_1=2^3-4=4$，显然成立；

假设当 $n=k$ 时，$S_k=2^{k+2}-4$；

当 $n=k+1$ 时，$S_{k+1}=S_k+b_{k+1}=2^{k+2}-4+2^{k+2}=2^{k+3}-4$，故结论成立.

(B)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，且满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$2S_n-S_nS_{n-1}=1(n\ge 2)$.

(1) 猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法证明；

(2) 设 $b_n=\dfrac{na_n}{1+30a_n},n\in N^*$，求 b_n 的最大值.

解析： (1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{6}$，$a_3=\dfrac{1}{12}$，$a_4=\dfrac{1}{20}$，$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$S_n=\dfrac{n}{n+1}$.

当 $n=1$时，$S_1=\dfrac{1}{2}$，显然成立；

假设当 $n=k$时，$S_k=\dfrac{k}{k+1}$；

当 $n=k+1$时，$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{k+2}$. 故结论成立.

(2) $b_n=\dfrac{na_n}{1+30a_n}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{30}{n(n+1)}}=\dfrac{n}{n^2+n+30}=\dfrac{1}{n+1+\frac{30}{n}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{30}+1}$ 当且仅当 $n=\sqrt{30}$ 时取等，而 $n\in N^*$，所以 $n=5$或 6，b_n 的最大值为 $\dfrac{1}{12}$.

21.(本小题满分 10 分)说明：请考生在**(A)**，**(B)**两小题中任选一题作答.

(A)设函数 $f(x)=x^2e^{ax}$，$a>0$.

(1)证明：$y=f(x)$在 $(0,+\infty)$上为增函数；

(2)若方程 $f(x)-1=0$有且只有两个不同的实数根，求实数 a的值.

解析： (1) $f'(x)=2x\cdot e^{ax}+x^2\cdot e^{ax}\cdot a=e^{ax}\left(ax^2+2x\right)$，由于 $a>0,x>0$，所以 $ax^2+2x>0$，而且 $e^{ax}>0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $y=f(x)$在 $(0,+\infty)$上为增函数

(2)设 $g(x)=f(x)-1$，那么 $g'(x)=e^{ax}\left(ax^2+2x\right)$，又因为 $a>0$，所以可知在 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{a}\right)$上 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，在 $\left(-\dfrac{2}{a},0\right)$上 $g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，在 $(0,+\infty)$上 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，所以要让 $g(x)$与 x 轴有且只有两

个交点，需要让极大值 $g\left(-\frac{2}{a}\right)=0$，可解得 $a=\frac{2}{e}$.

(B)
已知函数 $f(x)=x^2(-x$

(1)求函数 $y=f(x)$ 的最小值；

(2)若存在唯一实数 x_0 使得 $f(x_0)+\frac{3}{a}=0$ 成立，求实数 a 的值.

解析： (1) $f'(x)=e^{ax}(ax+2)(x-1)$，可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2}{a},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

而且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=(x^2-x-\frac{1}{a})e^{ax}>0$，所以可知当 $x=1$ 时，$f(1)=-\frac{1}{a}e^{a}<0$ 为最小值.

(2)设 $g(x)=f(x)+\frac{3}{a}$，那么 $g'(x)=e^{ax}(ax+2)(x-1)$，可知 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2}{a},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

而且当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)=(x^2-x-\frac{1}{a})e^{ax}+\frac{3}{a}>0$，所以可知要让 $g(x)$ 与 x 轴有且只有一个零点，则 $g(1)=0$，可解得 $a=\ln 3$.