设平面ABF的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ 2z=0.\end{cases}$

取$y=\sqrt{3}$，则$\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$为平面$ABF$的一个法向量.

同理可得$\boldsymbol{n}=(0,2,1)$为平面FBE的一个法向量. ………………………………………… 10分

则$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

又二面角$A-FB-E$的平面角为钝角，则其余弦值为$-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………… 12分

20. **解**：(1)由已知得$c=1$，$2a=\sqrt{4+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore a=\sqrt{2}$，$b=1$.

则E的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………………………… 4分

(2)当直线AB的斜率不为零时，可设AB：$x=my+t$代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$得

$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-2}{m^2+2}$，

$\Delta=8(m^2+2-t^2)$. …………………………………………………………………………… 6分

设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，得

$y=y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2}$，$x=x_1+x_2=my_1+t+my_2+t=m(y_1+y_2)+2t=\dfrac{4t}{m^2+2}$，

$\because$点P在椭圆E上，$\therefore\dfrac{16t^2}{2(m^2+2)^2}+\dfrac{4m^2t^2}{(m^2+2)^2}=1$，即$\dfrac{4t^2(m^2+2)}{(m^2+2)^2}=1$，$\therefore 4t^2=m^2+2$. ………………………… 8分

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{\dfrac{4m^2t^2}{(m^2+2)^2}-4\times\dfrac{t^2-2}{m^2+2}}=\dfrac{2\sqrt{1+m^2}}{m^2+2}\sqrt{6t^2}$，

原点到直线$x=my+t$的距离为$d=\dfrac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}$， ……………………………………………… 10分

$\therefore$四边形$OAPB$的面积

$S=2S_{\triangle OAB}=2\times\dfrac{1}{2}|AB|\times d=\dfrac{2\sqrt{1+m^2}}{m^2+2}\sqrt{6t^2}\times\dfrac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{6}t^2}{4t^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

当AB的斜率为零时，四边形$OAPB$的面积$S=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\therefore$四边形$OAPB$的面积为定值$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………………… 12分

21. **解**：(1)函数$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

当$m=-\dfrac{1}{2}$时，$g(x)=a\ln x+x^2$，所以$g'(x)=\dfrac{a}{x}+2x=\dfrac{2x^2+a}{x}$.

①当$a=0$时，$g(x)=x^2$，$x>0$时无零点.

②当 $a>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

取 $x_0=e^{-\frac{1}{a}}$，则 $g(e^{-\frac{1}{a}})=-1+(e^{-\frac{1}{a}})^2<0$，

因为 $g(1)=1$，所以 $g(x_0)\cdot g(1)<0$，此时函数 $g(x)$ 恰有一个零点. ………………………………………… 3 分

③当 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$.

当 $0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$ 上单调递减；

当 $x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增.

要使函数 $f(x)$ 有一个零点，则 $g\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)=a\ln\sqrt{-\frac{a}{2}}-\frac{a}{2}=0$ 即 $a=-2e$.

综上所述，若函数 $g(x)$ 恰有一个零点，则 $a=-2e$ 或 $a>0$. ………………………………………… 6 分

(2)令 $h(x)=f(x)-(1-m)x^2=mx^2-(2m+1)x+\ln x$，根据题意，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$ 恒成立.

又 $h'(x)=2mx-(2m+1)+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2mx-1)}{x}$. ………………………………………… 8 分

①若 $0<m<\frac{1}{2}$，则 $x\in\left(\frac{1}{2m},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2m},+\infty\right)$ 上是增函数，且 $h(x)\in\left(h\left(\frac{1}{2m}\right),+\infty\right)$，所以不符题意.

②若 $m\geqslant\frac{1}{2}$，则 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，且 $h(x)\in(h(1),+\infty)$，所以不符题意.

③若 $m\leqslant0$，则 $x\in(1,+\infty)$ 时，恒有 $h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，于是"$h(x)<0$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$，都成立"的充要条件是 $h(1)\leqslant0$，即 $m-(2m+1)\leqslant0$，解得 $m\geqslant-1$，故 $-1\leqslant m\leqslant0$.

综上，m 的取值范围是 $[-1,0]$. ………………………………………… 12 分

22. **解**：(1) C_1 的普通方程为 $x^2+y^2=1(y\geqslant0)$，

把 $x=x'$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}y'$ 代入上述方程得，$x'^2+\frac{y'^2}{3}=1(y'\geqslant0)$，

$\therefore C_2$ 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{3}=1(y\geqslant0)$.

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{3}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{3}{2\cos^2\theta+1}(\theta\in[0,\pi])$. ………………………………………… 5分

(2)在(1)中建立的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$，

由 $\begin{cases}\rho=1,\\ \theta=\alpha,\end{cases}$ 得 $\rho_A=1$，

由 $\begin{cases}\rho^2=\frac{3}{2\cos^2\theta+1},\\ \theta=\alpha,\end{cases}$ 得 $\rho_B=\sqrt{\frac{3}{2\cos^2\alpha+1}}$.

而 $\sqrt{\frac{3}{2\cos^2\alpha+1}}-1=\sqrt{2}-1$，$\therefore\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$.

而 $\alpha\in[0,\pi]$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 10分

23. **解**：(1)因为$f(x)_{\min}=f(1)=-a$，所以$-a\geqslant 3$，…… 3分

解得$a\leqslant -3$，即$a_{\max}=-3$. …… 4分

(2)$g(x)=f(x)+2|x+a|+a=|x-1|+2|x+a|$.

当$a=-1$时，$g(x)=3|x-1|\geqslant 0$，$0\neq 3$，所以$a=-1$不符合题意.

当$a<-1$时，$g(x)=\begin{cases}(x-1)+2(x+a), x\geqslant -a,\\(x-1)-2(x+a), 1\leqslant x<-a,\\-(x-1)-2(x+a), x<1,\end{cases}$ 即$g(x)=\begin{cases}3x-1+2a, x\geqslant -a,\\-x-1-2a, 1\leqslant x<-a,\\-3x+1-2a, x<1,\end{cases}$

所以$g(x)_{\min}=g(-a)=-a-1=3$，解得$a=-4$. …… 8分

当$a>-1$时，同法可知$g(x)_{\min}=g(-a)=a+1=3$，解得$a=2$.

综上，$a=2$或-4. …… 10分