若不裁员，则每天可揽件的上限为450件，公司每日揽件数情况如下：

包裹件数（近似处理）	50	150	250	350	450
实际揽件数	50	150	250	350	450
频率	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1
平均揽件数	$50\times0.1+150\times0.1+250\times0.5+350\times0.2+450\times0.1=260$				

故公司平均每日利润为$260\times5-3\times100=1000$（元）； ······ 9分

若裁员1人，则每天可揽件的上限为300件，公司每日揽件数情况如下：

包裹件数（近似处理）	50	150	250	350	450
实际揽件数	50	150	250	300	300
频率	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1
平均揽件数	$50\times0.1+150\times0.1+250\times0.5+300\times0.2+300\times0.1=235$				

故公司平均每日利润为$235\times5-2\times100=975$（元）. ······ 11分

故公司将前台工作人员裁员 1 人对提高公司利润不利. ······ 12分

20. **解**：（1）由已知得$c=1$，$2a=\sqrt{4+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore a=\sqrt{2}$，$b=1$.

则E的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ······ 4分

（2）设AB：$x=my+t(m\neq0)$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$得

$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{t^2-2}{m^2+2}$，

$\Delta=8(m^2+2-t^2)$. ······ 6分

设$P(x,y)$，由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$y=y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+2}$，

$x=x_1+x_2=my_1+t+my_2+t=m(y_1+y_2)+2t=\frac{4t}{m^2+2}$.

$\because$点P在椭圆E上，$\therefore\frac{16t^2}{2(m^2+2)^2}+\frac{4m^2t^2}{(m^2+2)^2}=1$，即$\frac{4t^2(m^2+2)}{(m^2+2)^2}=1$，$\therefore4t^2=m^2+2$. ······ 8分

在$x=my+t$中，令$y=0$，则$x=t$，令$x=0$，则$y=-\frac{t}{m}$.

$\therefore$三角形面积$S=\frac{1}{2}|xy|=\frac{1}{2}\times\frac{t^2}{|m|}=\frac{1}{8}\times\frac{m^2+2}{|m|}=\frac{1}{8}\left(|m|+\frac{2}{|m|}\right)\geqslant\frac{1}{8}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. ······ 10分

当且仅当$m^2=2$，$t^2=1$时取得等号，此时$\Delta=24>0$.

$\therefore$所求三角形面积的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$. ······ 12分

21. **解**：（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-a)(x-1)}{x}$.

若 $0<a<1$，则

当 $0<x<a$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $a<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. ······ 2分

若 $a\leqslant 0$，则

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ………………………………………… 4 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减；当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(a,1)$ 上单调递减，在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 5 分

(2)原题等价于对任意 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，有 $-a\ln x+x^a\leqslant e-1$ 成立.

设 $g(x)=-a\ln x+x^a$，$a>0$，所以 $g(x)_{\max}\leqslant e-1$.

$g'(x)=\frac{-a}{x}+ax^{a-1}=\frac{a(x^a-1)}{x}$.

令 $g'(x)<0$，得 $0<x<1$；令 $g'(x)>0$，得 $x>1$.

所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,e]$ 上单调递增，

$g(x)_{\max}$ 为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=a+e^{-a}$ 与 $g(e)=-a+e^a$ 中的较大者. ………………………………… 7 分

设 $h(a)=g(e)-g\left(\frac{1}{e}\right)=e^a-e^{-a}-2a(a>0)$，

则 $h'(a)=e^a+e^{-a}-2>2\sqrt{e^a\cdot e^{-a}}-2=0$，

所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(a)>h(0)=0$，所以 $g(e)>g\left(\frac{1}{e}\right)$，

从而 $g(x)_{\max}=g(e)=-a+e^a$. ………………………………………………………… 9 分

所以 $-a+e^a\leqslant e-1$ 即 $e^a-a-e+1\leqslant 0$.

设 $\varphi(a)=e^a-a-e+1(a>0)$，则 $\varphi'(a)=e^a-1>0$.

所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1)=0$，所以 $e^a-a-e+1\leqslant 0$ 的解为 $a\leqslant 1$.

因为 $a>0$，所以正实数 a 的取值范围为 $(0,1]$. ……………………………………… 12 分

22. **解**：(1) C_1 的普通方程为 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，

把 $x=x'$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}y'$ 代入上述方程得，$x'^2+\frac{y'^2}{3}=1(y'\geqslant 0)$，

$\therefore C_2$ 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{3}=1(y\geqslant 0)$.

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{3}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{3}{2\cos^2\theta+1}(\theta\in[0,\pi])$. ……………………………… 5分

(2)在(1)中建立的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$，

由 $\begin{cases}\rho=1,\\ \theta=\alpha,\end{cases}$ 得 $\rho_A=1$，

由 $\begin{cases}\rho^2=\frac{3}{2\cos^2\theta+1},\\ \theta=\alpha,\end{cases}$ 得 $\rho_B=\sqrt{\frac{3}{2\cos^2\alpha+1}}$.

而 $\sqrt{\frac{3}{2\cos^2\alpha+1}}-1=\sqrt{2}-1$，$\therefore\cos\alpha=\pm\frac{1}{2}$.

而 $\alpha\in[0,\pi]$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………… 10分

23. **解**：(1)因为$f(x)_{\min}=f(1)=-a$，所以$-a\geqslant 3$，…… 3分

解得$a\leqslant -3$，即$a_{\max}=-3$. …… 4分

(2)$g(x)=f(x)+2|x+a|+a=|x-1|+2|x+a|$.

当$a=-1$时，$g(x)=3|x-1|\geqslant 0$，$0\neq 3$，所以$a=-1$不符合题意.

当$a<-1$时，$g(x)=\begin{cases}(x-1)+2(x+a), x\geqslant -a,\\ (x-1)-2(x+a), 1\leqslant x<-a,\\ -(x-1)-2(x+a), x<1,\end{cases}$ 即$g(x)=\begin{cases}3x-1+2a, x\geqslant -a,\\ -x-1-2a, 1\leqslant x<-a,\\ -3x+1-2a, x<1,\end{cases}$

所以$g(x)_{\min}=g(-a)=-a-1=3$，解得$a=-4$. …… 8分

当$a>-1$时，同法可知$g(x)_{\min}=g(-a)=a+1=3$，解得$a=2$.

综上，$a=2$或-4. …… 10分