10.已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，若 $f(\frac{\pi}{4})=2,f(\pi)=0$，在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上具有单调性，那么 ω 的取值共有

A.6个　　B.7个　　C.8个　　D.9个

考点：三角函数的单调性，周期

答案：D

解析：由 $f(\frac{\pi}{4})=2,f(\pi)=0$ 知，$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}=\frac{(2n-1)T}{4}(n\in N^*)$，则 $T=\frac{3\pi}{(2n-1)}(n\in N^*)$，又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上具有单调性，

故 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\le\frac{T}{2}$，则 $\frac{\pi}{12}\le\frac{3\pi}{2(2n-1)}$，$2n-1\le 18, n\le\frac{19}{2}$，又 $n\in N^*$，所以 n 最大值为 9，

故 n 的可能取值有 $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 共 9 个，所以 ω 的取值共有 9 个。

11.三棱锥 $D-ABC$ 中，$CD\perp$ 底面 ABC，ΔABC 为正三角形，若 $AE//CD, AB=CD=AE=2$，则三棱锥 $D-ABC$ 与三棱锥 $E-ABC$ 的公共部分构成的几何体的外接球的体积为(　)

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$　　B. $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$　　C. $\frac{20}{3}\pi$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{2}\pi$

考点：共面共点、外接球

答案：B

解析：由题知：连接 CE,AD 交于点 P，则 P-ABC 即为公共的三棱锥，且侧面 PAC 为等腰直角三角形，且垂直于底面，故球心位于底面的外心上，即底面三角形 ABC 的外接圆半径即为球半径，$R=r=\frac{2}{\sqrt{3}},V=\frac{4}{3}\pi(\frac{2}{\sqrt{3}})^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

12.设函数 $f(x)=x^2-x\ln x+2$，若存在区间 $[a,b]\subseteq[\frac{1}{2},+\infty)$，使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[k(a+2),k(b+2)]$，则 k 的取值范围是(　)

A. $(1,\frac{9+2\ln 2}{4})$　　B. $\left[1,\frac{9+2\ln 2}{4}\right]$　　C. $(1,\frac{9+2\ln 2}{10}]$　　D. $\left[1,\frac{9+2\ln 2}{10}\right]$

考点：函数的同构，求切线方程

答案：C

解析：由题意得：在 $[a,b]$ 上，$f(x)$ 与 $y=k(x+2)$ 有 2 个不同交点，求导得：$f'(x)=2x-\ln x-1,f''(x)=2-\frac{1}{x}$

$x\ge\frac{1}{2}$ 时，$f''(x)=2-\frac{1}{x}>0$，故 $f'(x)$ 递增，$f'(\frac{1}{2})=\ln 2>0$，故此时 $f(x)$ 递增且为凹函数，故 k 的临界状态为切线斜率及点（-2,0）与点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 连线的斜率

相切时有：设切点为（x_0, y_0）$2x_0-\ln x_0-1=\frac{x_0^2-x_0\ln x_0+2}{x_0+2}$，整理解得：$x_0=1$，故切线 k_1 斜率为 1

割线时有：$k_2=\frac{(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}+2}=\frac{\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{5}{2}}=\frac{9+2\ln 2}{10}$

故为 $(1,\frac{9+2\ln 2}{10}]$

二、填空题：本大题共四道，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在多项式 $(1+2x)^6(1+y)^5$ 的展开式中，xy^3 的系数为______.

考点：二项式定理

答案：120

解析：xy^3 的系数为 $C_6^1\cdot 2\cdot C_5^2=120$

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 F，过点 F 向双曲线的一条渐近线引垂线，垂足为 M，交另一条渐近线于 N．若 $2\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{FN}$，则双曲线的离心率 $e=$______.

考点：双曲线的性质

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：由题易知 $MF=b$，所以 $FN=2b$，进一步有，$\tan\angle MOF=\frac{b}{a}$，$\tan\angle MON=\frac{3b}{a}$，又因为 $2\angle MOF=\angle MON$，则有 $\frac{3b}{a}=\frac{2\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，

即 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15. 某人在微信群中发了一个 7 元“拼手气”红包，被甲、乙、丙三人抢完，若三人均领到整数元，且每人至少领到 1 元，则甲领取的钱数不少于其他任何人的概率是______.

考点：排列组合

答案：$\frac{2}{5}$

解析：将 7 元分成 3 份，可能性有 $(5,1,1)$，$(4,2,1)$，$(3,3,1)$，$(3,2,2)$，其中第一，三，四种分法有 3 种情况，第二种分法有 6 种，其中符合最佳手气的有 6 种，故概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

16.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0, a_n-a_{n-1}-1=2(n-1)(n\in N^*, n\geq 2)$，若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=n\cdot\sqrt{a_{n+1}+1}\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}$，则数列 $\{b_n\}$ 的最大项为第____项

考点：累加法求数列通项、数列的单调性和最值

答案：6

解析：移项整理得：$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$

可得类比式：$\begin{matrix} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_{n-1} = a_{n-2} + 2n - 3 \\ \cdots \\ a_2 = a_1 + 3 \end{matrix}$，累加可得：$a_n = a_1 + 2\cdot\dfrac{(n-1)(3+2n-1)}{2} = n^2 - 1$

有：$\sqrt{a_{n+1}+1} = n+1$

所以 $b_n = n(n+1)\cdot(\dfrac{8}{11})^{n-1}$，类比得 $b_{n+1} = (n+1)(n+2)(\dfrac{8}{11})^n$

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)(\frac{8}{11})^{n-1}((n+2)\frac{8}{11} - n) = (n+1)(\frac{8}{11})^{n-1}\frac{8n+16-11n}{11} = (n+1)(\frac{8}{11})^{n-1}\frac{16-3n}{11}$$

故 $n \le 5$ 时上式为正，数列递增，$n \ge 6$ 时上式为负，数列递减，且 $b_6 - b_5 > 0$，$b_6 - b_7 < 0$，所以最大项为第 6 项

三、解答题：本大题共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. ΔABC 的内角为 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{a}{\cos C\sin B} = \dfrac{b}{\sin B} + \dfrac{c}{\cos C}$.

(1) 求 $\sin(A+B) + \sin A\cos A + \cos(A-B)$ 的最大值；

(2) 若 $b = \sqrt{2}$，当 ΔABC 的面积最大时，ΔABC 的周长；

考点：解三角形与不等式

解析：(1) 由 $\dfrac{a}{\cos C\sin B} = \dfrac{b}{\sin B} + \dfrac{c}{\cos C}$ 得；$\dfrac{a}{\cos C\sin B} = \dfrac{b\cos C + c\sin B}{\sin B\cos C}$

$a = b\cos C + c\sin B$ 即 $\sin A = \sin B\cos C + \sin C\sin B$

$\cos B = \sin B$ $B = \dfrac{\pi}{4}$；

由 $\sin(A+B) + \sin A\cos A + \cos(A-B) = \sqrt{2}(\sin A + \cos A) + \sin A\cos A$

令 $t = \sin A + \cos A$， 原式 $= \dfrac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t - \dfrac{1}{2}$

当且仅当 $A = \dfrac{\pi}{4}$ 时， 上式的最大值为 $\dfrac{5}{2}$。

(2)

$S = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{\sqrt{2}}{4}ac$，$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$， 即 $2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac \ge (2-\sqrt{2})ac$，$ac \le 2 + \sqrt{2}$，当且仅当 $a = c = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ 等号成立；

$S_{MAX}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，

周长 $L=a+b+c=2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}$。

18 .某校倡导为特困学生募捐，要求在自动购水机处每购买一瓶矿泉水，便自觉向捐款箱中至少投入一元钱。现统计了连续 5 天的售出矿泉水箱数和收入情况，列表如下：

售出水量 x(单位：箱)	7	6	6	5	6
收入 y(单位：元)	165	142	148	125	150

学校计划将捐款以奖学金的形式奖励给品学兼优的特困生，规定：特困生综合考核前 20 名，获一等奖学金 500 元；综合考核 21-50 名，获二等奖学金 300 元；综合考核 50 名以后的不获得奖学金

(1)若 x 与 y 成线性相关，则某天售出 9 箱水时，预计收入为多少元？

(2)甲乙两名学生获一等奖学金的概率均为 $\frac{2}{5}$ ，获二等奖学金的概率均为 $\frac{1}{3}$ ，不获得奖学金的概率均为 $\frac{4}{15}$ ，已知甲乙两名学生获得哪个等级的奖学金相互独立的，求甲乙两名学生所获得奖学金之和 X 的分布列及数学期望；

附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ ，其中 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ ， $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$

考点：线性回归方程求法，分布列与期望求法

解析：(1) $\overline{x}=6,\overline{y}=146$ ，经计算 $\hat{b}=20,a=26$ ，所以线性回归方程为 $\hat{y}=20x+26$ ，

当 $x=9$ 时， y 的估计值为 206 元；

(2)X 的可能取值为 0,300,500,600,800,1000;

$P(X=0)=\frac{4}{15}\times\frac{4}{15}=\frac{16}{225}$

$P(X=300)=2\times\frac{4}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{45}$

$P(X=500)=2\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{15}=\frac{16}{75}$