又$\because$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$PN\perp AD$

$\therefore PN\perp$平面 $ABCD$

$\therefore PN\perp NB$

$\therefore S_{\Delta PNB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

$\because$ $AD\perp$平面 PNB，AD BC

$\therefore$ $BC\perp$平面 PNB

又 $PM=2MC$

$\therefore V_{P-NBM}=V_{M-PNB}=\frac{2}{3}V_{C-PNB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times2=\frac{2}{3}$.

20.（本题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 $F_2(2,0)$，点 $B(2,-\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 $y=kx(k\neq0)$ 与椭圆 C 交于 E,F 两点，直线 AE、AF 分别与 y 轴交于点 M、N.在 x 轴上，是否存在点 P，使得无论非零实数 k 怎么变化，总有 $\angle MPN$ 为直角？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

考点：圆锥曲线方程的求解；圆锥曲线中的存在性问题

解析：

（1）依题意，$c=2$，

$\because$ 点 $B(2,-\sqrt{2})$ 在 C 上

$\therefore\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$

又 $a^2=b^2+c^2$

$\therefore a^2=8,b^2=4$

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

（2）假设存在这样的点 P，设 $P(x,0),E(x_1,y_1)$，则 $F(-x_1,-y_1)$

$\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)\cdot x^2-8=0$，解得 $x_1=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+2k^2}},y_1=\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{1+2k^2}}$

$A(-2\sqrt{2},0)$ $\therefore AE$ 所在直线方程为 $y=\frac{k}{1+\sqrt{1+2k^2}}\cdot(x+2\sqrt{2})$

$\therefore M(0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}})$

同理可得 $N(0,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}})$

$PM=(-x,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1+\sqrt{1+2k^2}}),PN=(-x,\dfrac{2\sqrt{2}k}{1-\sqrt{1+2k^2}})$

$PM\cdot PN=0\Rightarrow x^2-4=0$

$\therefore x=2$ 或 $x=-2$

∴存在点 P，使得无论非零实数 k 怎么变化，总有 $\angle MPN$ 为直角，点 P 坐标为 $(2,0)$ 或 $(-2,0)$.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x,g(x)=\dfrac{x}{e^x}-2$

（1）求函数 $f(x)$ 的极值

（2）若对任意给定的 $x_0\in(0,e]$，方程 $f(x)=g(x_0)$ 在 $(0,e]$ 上总有两个不相等的实数根，求实数 a 的取值范围

考点：导数的综合运用

解析：

（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)=\dfrac{(2x+1)(-ax+1)}{x}$

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0,f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 无极值；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{a}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 递增，$(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 递减，$f(\dfrac{1}{a})_{极大}=\ln\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}-1$

综上所述，$a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值；$a>0$，$f(\dfrac{1}{a})_{极大}=\ln\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}-1$

（2）$g(x)=\dfrac{x}{e^x}-2$，$g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，令 $g'(x)>0,x\in(-\infty,1),g(x)$ 单增；$x\in(-\infty,1),g'(x)<0,g(x)$ 递减。$x\in(0,e]$ 时，

$g(x)\in(-2,\dfrac{1}{e}-2]$。

依题意，$\begin{cases}0<\dfrac{1}{a}<1\\ f(\dfrac{1}{a})>g(x)_{\max}\\ f(e)\le -2\end{cases}$，由 $f(e)=1-ae^2+2e-ea\le -2$，得 $a\ge\dfrac{3+2e}{e^2+e}$

由 $f(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}-1>\dfrac{1}{e}-2$，即 $\ln a-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{e}<1$，令 $h(a)=\ln a-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{e}$，可知 $h(a)$ 单增，且 $h(e)=1$，

$\therefore \ln a-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{e}<1$，得 $a\in(0,e)$

综上所述，$\dfrac{3+2e}{e^2+e} \le a < e$

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 过点 $P(a,1)$，参数方程为 $\begin{cases} x = a+\sqrt{2}t \\ y = 1+\sqrt{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数，$a \in R$）.以 O 为极点，极轴为 x 轴非负半轴建立平面直角坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta + 4\cos\theta - \rho = 0$.

(1)写出曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程

(2)已知曲线 C_1 和曲线 C_2 交于 A,B 两点，且 $|PA| = 2|PB|$，求实数 a 的值

考点：参数方程和极坐标问题

解析：

(1)由题可得曲线 C_1 为：$x - y - a + 1 = 0$

$\rho\cos^2\theta + 4\cos\theta - \rho = 0$ 转化为一般方程为：$y^2 = 4x$

（2）由题意可得直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数，$a \in R$）代入 $y^2 = 4x$ 得

$t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 - 8a = 0$，由韦达定理得 $t_1 + t_2 = 2\sqrt{2}$，$t_1t_2 = 2 - 8a$

当 $2 - 8a > 0$ 即 $a < \dfrac{1}{4}$ 时，$t_1 = 2t_2$ 故 $t_1 = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}, t_2 = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$，则 $t_1t_2 = 2 - 8a = \dfrac{16}{9}$，即 $a = \dfrac{1}{36}$

当 $2 - 8a < 0$ 即 $a > \dfrac{1}{4}$ 时，$t_1 = -2t_2$ 故 $t_1 = 4\sqrt{2}, t_2 = -2\sqrt{2}$，则 $t_1t_2 = 2 - 8a = -16$，即 $a = \dfrac{9}{4}$

所以实数 a 的值为 $\dfrac{1}{36}$ 或 $\dfrac{9}{4}$

23. 已知函数 $f(x) = |x+m| + |2x-1|$

（1）当 $m = -1$ 时，求不等式 $f(x) \le 2$ 的解集

（2）若 $f(x) \le |2x+1|$ 的解集包含 $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$，求 m 的取值范围

考点：绝对值不等式，不等式的恒成立

解析：

解：（1）当$m=-1$时，$f(x)=|x-1|+|2x-1|$，由$f(x)\le 2$得

$\begin{cases} x\le \frac{1}{2} \\ 1-x+1-2x\le 2 \end{cases}$或$\begin{cases} \frac{1}{2}<x<1 \\ 1-x+2x-1\le 2 \end{cases}$或$\begin{cases} x\ge 1 \\ x-1+2x-1\le 2 \end{cases}$

解得，

$\begin{cases} x\le \frac{1}{2} \\ x\ge 0 \end{cases}$或$\begin{cases} \frac{1}{2}<x<1 \\ x\le 2 \end{cases}$或$\begin{cases} x\ge 1 \\ x\le \frac{4}{3} \end{cases}$

综上，不等式的解集为$\left\{x\middle|0\le x\le \frac{4}{3}\right\}$

（2）$\because f(x)\le |2x+1|$的解集包含

$\therefore$当$x\in\left[\frac{3}{4},2\right]$时，$f(x)\le |2x+1|$恒成立

即$|x+m|+|2x-1|\le |2x+1|$在$\left[\frac{3}{4},2\right]$上恒成立$\therefore |x+m|+2x-1\le 2x+1 \therefore |x+m|\le 2 \therefore -2\le x+m\le 2$

$\therefore -2-x\le m\le 2-x$在$x\in\left[\frac{3}{4},2\right]$上恒成立$\therefore (-2-x)_{max}\le m\le (2-x)_{min} \therefore -\frac{11}{4}\le m\le 0$

即 m 的取值范围是$\left[-\frac{11}{4},0\right]$