太原市 2017 ～ 2018 学年第一学期高三年级期末考试

数学(理) 参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	A	B	C	A	D	D	B	C	A

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 3　　14. 4　　15. 2017　　16. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

三、解答题(本大题共 70 分)

17.(本小题满分 12 分)

解(1) 由题得 $a_4 = S_4 - S_3 = 8a_1 = 16$,解得 $a_1 = 2$, ………… 2 分

故 $S_n = 2^{n+1} - 2$, ………… 3 分

则 $n \geqslant 2$ 时,$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n$,令 $n = 1$,$a_1 = 2$ 成立,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$. ………… 6 分

(2) $b_n = \frac{n^2}{2^n}$,$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$.

当 $1 \leqslant n \leqslant 2$ 时,$-n^2 + 2n + 1 > 0$,则 $b_{n+1} > b_n$,

当 $n \geqslant 3$ 时,$-n^2 + 2n + 1 < 0$,则 $b_{n+1} < b_n$, ………… 10 分

故数列 $\{b_n\}$ 前 3 项依次递增,从第 3 项开始依次递减,

所以数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_3 = \frac{9}{8}$. ………… 12 分

18.(本小题满分 12 分)

解(1) 由 $\tan A + \tan B + \sqrt{3} = \sqrt{3}\tan A \cdot \tan B$ 得

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \frac{\sqrt{3}\tan A\tan B - \sqrt{3}}{1 - \tan A\tan B} = -\sqrt{3}$, ………… 4 分

又 $0 < A + B < \pi$,则 $A + B = \frac{2\pi}{3}$,故 $C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

另解:由已知得 $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\sin A\sin B}{\cos A\cos B}$,

则 $\sin(A + B) + \sqrt{3}\cos(A + B) = 0$,即 $\tan(A + B) = -\sqrt{3}$,

又 $0 < A + B < \pi$,则 $A + B = \frac{2\pi}{3}$,故 $C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理及(1)，得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}$，则 $a^2 + b^2 - ab = 9$，……………… 8分

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，则 $ab = 6$，……………………………… 9分

则 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = ab + 9 + 2ab = 27$，即 $a + b = 3\sqrt{3}$，………… 11分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + 3\sqrt{3}$. ……………………………………………… 12分

19.（本小题满分12分）

解(1) $\xi = 0,1,2,3$，

$P(\xi = 0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$，$P(\xi = 1) = \frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$，$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{40}$，

$P(\xi = 3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$，

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

……………………………………………… 5分

ξ 的数学期望为 $E(\xi) = 0\times\frac{7}{24} + 1\times\frac{21}{40} + 2\times\frac{7}{40} + 3\times\frac{1}{120} = \frac{9}{10}$. ………… 6分

(2) 设两次共摸出红球的个数为 η，则 $\eta = 0,1,2,3,4,5,6$，

$P(\eta = 6) = \frac{1}{120\times120}$，$P(\eta = 5) = \frac{42}{120\times120}$，$P(\eta = 4) = \frac{567}{120\times120}$，

$P(\eta = 3) = \frac{2716}{120\times120}$，$P(\eta = 2) = \frac{5439}{120\times120}$，

$P(\eta = 1) = \frac{4410}{120\times120}$，$P(\eta = 0) = \frac{1225}{120\times120}$，

则有 $P(\eta \geqslant 2) = \frac{1+42+567+2716+5439}{120\times120} \approx 60.8\%$，……………………… 11分

则 $n = 2$. ……………………………………………………………… 12分

20.（本小题满分12分）

解(1) 由 $PD \perp AB$，$PD \perp BC$，$AB \cap BC = B$，得 $PD \perp$ 平面 $ABCD$，

从而 $PD \perp AD$. ……………………………………………………… 2分

又在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD\cdot AB\cdot\cos30^\circ = \frac{1}{3}AD^2$，

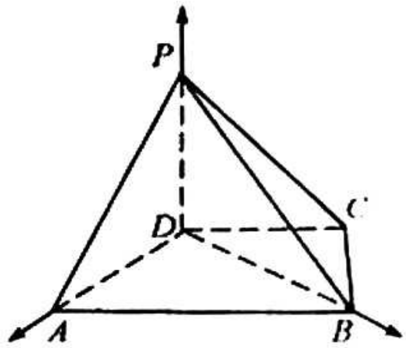
则有 $AD^2 + BD^2 = AB^2$，所以 $\angle ADB = 90^\circ$，即 $AD \perp DB$，………………… 4分

又 $PD \cap DB = D$，

则有 $AD \perp$ 平面 PDB，故 $AD \perp PB$. ……………………………………… 6分

(2) 以 D 为原点建立如图所示空间直角坐标系 $D - xyz$，

设 $AD=\sqrt{3}$，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,1,0)$，$C(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，



设平面 APB 的一个法向量为 $m=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} m\cdot\overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}x+y=0, \\ m\cdot\overrightarrow{BP}=-y+\sqrt{3}z=0, \end{cases}$$ 令 $x=1$，

则 $y=\sqrt{3}$，$z=1$，故 $m=(1,\sqrt{3},1)$，……………… 8 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=0, \\ n\cdot\overrightarrow{BP}=-y+\sqrt{3}z=0, \end{cases}$$ 令 $x=1$，

则有 $y=-\sqrt{3}$，$z=-1$，故 $n=(1,-\sqrt{3},-1)$，……………… 10 分

所以 $\cos<m,n>=\frac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\frac{-3}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=-\frac{3}{5}$，

由图知，二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{3}{5}$。……………… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

解(1) 函数定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=\frac{m(x-1)}{e^x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，……………… 2 分

当 $m>0$ 时，若 $x>1$，则 $f'(x)>0$；若 $x<1$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，

当 $m<0$ 时，若 $x>1$，则 $f'(x)<0$；若 $x<1$，则 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值。

所以实数 m 的取值范围是 $(0,+\infty)$。……………… 6 分

(2) 函数 $h(x)=x^2+e^x(\ln x-ax+1)$ 在 $x>0$ 时有唯一零点，即方程 $-\frac{x}{e^x}=\frac{\ln x+1}{x}-a$ 在 $x>0$ 时有唯一实根，

由(1)知函数 $p(x)=-\frac{x}{e^x}$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $-\frac{1}{e}$，……………… 8 分

设 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}-a$，$g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，有 $x=1$，

列表如下

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	正	0	负
$g(x)$	增函数	极大值	减函数

故 $x=1$ 时，$g(x)_{max}=g(1)=1-a$，……………… 10 分

又 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$p(x)\to 0$，$g(x)\to -a$，

所以方程 $-\frac{x}{e^x}=\frac{\ln x+1}{x}-a$ 有唯一实根时，$-\frac{1}{e}=1-a$ 或 $-a\geqslant 0$，此时 a 的取值范围为 $\{a\mid a=1+\frac{1}{e}$ 或 $a\leqslant 0\}$。……………… 12 分

22.（本小题满分 10 分） **选修 4—4：坐标系与参数方程**

解(1) 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2y=0$, ………… 2 分

表示圆心为 $C(\sqrt{2},1)$，半径为 $r=\sqrt{3}$ 的圆，

化为参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）， ………… 3 分

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{2}x-y+3=0$. ………… 5 分

(2) 由题知点 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{2}|MA|$,

设点 $M(\sqrt{2}+\sqrt{3}\cos\theta,1+\sqrt{3}\sin\theta)$,

则有点 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4-\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta|}{\sqrt{3}}=\frac{|4+3\sin(\theta+\varphi)|}{\sqrt{3}}$,

其中 $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$，即 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$d_{\max}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，$|MA|_{\max}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$,

此时 $\cos\theta=\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\theta=\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$M(2\sqrt{2},0)$; ………… 7 分

当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 即 $\theta+\varphi=\frac{3\pi}{2}$ 时，$d_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$|MA|_{\min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

此时 $\cos\theta=-\sin\varphi=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\theta=-\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$M(0,2)$. ………… 9 分

综上，点 M 坐标为 $(2\sqrt{2},0)$ 时，$|MA|_{\max}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$；点 M 坐标为 $(0,2)$ 时，$|MA|_{\min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

………… 10 分

23.（本小题满分 10 分） **选修 4—5：不等式选讲**

(1) $f(x)\leqslant 5\Leftrightarrow |x+1|+|x-2|\leqslant 5$,

则有 $\begin{cases}x\leqslant -1,\\ 2x+4\geqslant 0,\end{cases}$ ① 或 $\begin{cases}-1<x<2,\\ -2\leqslant 0,\end{cases}$ ② 或 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\ 2x-6\leqslant 0,\end{cases}$ ③ ………… 2 分

解①得 $-2\leqslant x\leqslant -1$，解②得 $-1<x<2$，解③得 $2\leqslant x\leqslant 3$, ………… 4 分

则不等式的解集为 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$. ………… 5 分

(2) $g(x)\geqslant 0\Leftrightarrow x^2-5x+4\leqslant 0$，解得 $1\leqslant x\leqslant 4$，则 $N=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$, ………… 6 分

所以 $M\cap N=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$, ………… 7 分

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=3$，$f(x)-g(x)-3=x^2-5x+4=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$,

由 $-\frac{3}{2}\leqslant x-\frac{5}{2}\leqslant -\frac{1}{2}$，有 $(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}\leqslant 0$，则 $f(x)\leqslant g(x)+3$ 成立；

当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=2x-1$，$f(x)-g(x)-3=x^2-3x=x(x-3)$,

由 $x-3\leqslant 0$，$x>0$，知 $f(x)-g(x)-3\leqslant 0$，则 $f(x)\leqslant g(x)+3$ 成立.

综上，$f(x)\leqslant g(x)+3$ 成立. ………… 10 分

注：以上各题，其他正确解法相应得分.