上得到 $\frac{2pb^2}{a^2}=b$，得到 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，则离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三.解答题（本大题共 5 小题，共 52 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.(本小题满分 10 分)

已知命题 p:直线 $y=x+m$ 经过第一、第二和第三象限，q:方程 $x^2+2x+m=0$ 无实数根.

（1）若 $p\wedge q$ 是真命题，求实数 m 的取值范围；

（2） 若 $\neg p\vee q$ 是假命题，求实数 m 的取值范围

答案：（1） $(0,+\infty)$ （2） $(0,1]$

考点：简易逻辑

解析：（1） $p:m>0$

$q:\Delta=4-4m<0\Rightarrow m>1$

当 p 假命题，q 假命题时，$\begin{cases}m\le 0\\ m\le 1\end{cases}\Rightarrow m\le 0$

则 $p\vee q$ 为真命题：$m>0$，故 m 的取值范围为 $(0,+\infty)$

（2）$\neg p$ 假命题，p 真命题，则 $m>0$；

q 假命题，则 $m\le 1$

则 $0<m\le 1$，故 m 的取值范围为 $(0,1]$

18.(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-3x+b$ 在 $x=-1$ 处的切线平行于 x 轴.

（1）求实数 a 的值；

（2）求 $f(x)$ 的极大值与极小值的差.

答案：（1） $a=0$ （2） 4

考点：导数的应用

解析：（1） $f(x)=x^3+ax^2-3x+b$，$f'(x)=3x^2+2ax-3$，

由 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程平行于 x 轴，

所以，$0=f'(-1)=3-2a-3=-2a$，即 $a=0$.

（2） $f(x)=x^3-3x+b$，$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，

令 $f'(x)=0$，即 $x_1=-1,x_2=1$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以，$f(x)_{极大值}=f(-1)=2+b$；$f(x)_{极小值}=f(1)=-2+b$，

故，$f(x)$ 的极大值与极小值的差为 4.

19.(本小题满分 10 分)

已知抛物线 C 的准线经过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点.

（1）求抛物线 C 的标准方程及其准线方程

（2）若过抛物线 C 焦点 F 的直线 l 与该抛物线教育 A,B 两个不同点，且 $|AB|=10$，求直线 l 的方程.

答案：（1）$y^2=8x$ （2）$y=\pm2x$

考点：抛物线的方程与性质

解析：（1）由已知得，双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点 $(-2,0)$.

所以，抛物线的准线为 $x=-2$.

故，抛物线的标准方程为 $y^2=8x$.

（2）设直线 $y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-2)\\y^2=8x\end{cases}$，化简整理得，$k^2x^2-4(k^2+2)x+4k^2=0$.

由韦达定理有 $x_1+x_2=\dfrac{4(k^2+2)}{k^2}$，

所以，$|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{4(k^2+2)}{k^2}+4=10$，解得 $k^2=4$，即 $k=\pm2$.

故，直线 l 的方程为 $y=2x,y=-2x$.

20.(本小题满分 10 分)**说明:请考生在(A)，(B)两个小题中任选一题作答.**

（A）已知函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x-\ln x(a\in R)$.

（1） 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间

（2） 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，求证:不等式 $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立.

答案：（1）$f(x)$的单调减区间为$(0,1)$，$f(x)$的单调增区间为$(1,+\infty)$（2）略

考点：导数在函数中的应用

解析：

（1）当$a=\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$，　$f'(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}(x>0)$

令$f'(x)=0$，即$x_1=-1$(舍去)$,x_2=1$.

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因此，$f(x)$的单调减区间为$(0,1)$；单调增区间为$(1,+\infty)$.

（2）$f(x)=ax^2+(2a-1)x-\ln x$，

$f'(x)=2ax+(2a-1)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2+(2a-1)x-1}{x}=\dfrac{(2ax-1)(x+1)}{x}(x>0)$

令$f'(x)=0$，即$x_1=-1$(舍去)$,x_2=\dfrac{1}{2a}$.

当$a>\dfrac{1}{2}$时，有$\dfrac{1}{2a}\le 1$，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=3a-1>\dfrac{1}{2}$，

故，$f(x)>\dfrac{1}{2}$在$[1,+\infty)$上恒成立.

（B）已知函数$f(x)=ax^2+(2a-1)x-\ln x(a\in R)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若不等式$f(x)>\dfrac{1}{2}$在$[1,+\infty)$恒成立，求实数a的取值范围.

答案：（1）$f(x)$的单调减区间为$\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$，$f(x)$的单调增区间为$\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$

（2）$a\ge\dfrac{1}{2}$

考点：导数在函数中的应用

解析：

（1）$f(x)=ax^2+(2a-1)x-\ln x$，

$f'(x)=2ax+(2a-1)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2+(2a-1)x-1}{x}=\dfrac{(2ax-1)(x+1)}{x}(x>0)$

当$a\le 0$时，有$2ax-1<0,x+1>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，即 $x_1=-1$(舍去)$,x_2=\dfrac{1}{2a}$.

若 $x\in(0,\dfrac{1}{2a})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

若 $x\in(\dfrac{1}{2a},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因此，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间为 $(0,\dfrac{1}{2a})$，$f(x)$ 的单调增区间为 $(\dfrac{1}{2a},+\infty)$.

（2）当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，即 $f(x)<f(1)=3a-1<0$，矛盾.

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，即 $1<\dfrac{1}{2a}$，$f(x)$ 在 $[1,\dfrac{1}{2a})$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2a},+\infty)$ 单调递增.

由于 $f(x)\ge\dfrac{1}{2}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{2a})=1-\dfrac{1}{4a}+\ln(2a)\ge\dfrac{1}{2}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(a)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4a}+\ln(2a)$，故只需证明 $g(a)\ge 0$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 恒成立.

$g'(a)=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a}>0$, $g(a)$ 单调递增，$g(a)<g(\dfrac{1}{2})=0$，矛盾.

当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，有 $\dfrac{1}{2a}\le 1$，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=3a-1\ge\dfrac{1}{2}$，即 $f(x)\ge\dfrac{1}{2}$

在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，故 $a\ge\dfrac{1}{2}$.

21.(本小题满分 10 分)**说明:请考生在(A)，(B)两个小题中任选一题作答.**

（A）已知点 F_1,F_2 分别是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$的左，右焦点，点 A,B 分别是其右顶点和上顶点，椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，且 $\overrightarrow{F_2A}\bullet\overrightarrow{F_2B}=-1$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2） 若过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相较于 M,N 两个不同点，求 $\triangle F_1MN$ 面积的最大值.

答案：（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ （2） 4

考点： 解析几何综合

解析：

（1） $A(a,0),B(0,b),F_2(c,0)$

$\overrightarrow{F_2A}=(a-c,0),\overrightarrow{F_2B}=(-c,b)$，$-1=\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=-c(a-c)=c(c-a)$，

又由已知得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

解得$a=2,b=\sqrt{3},c=1$，故，方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）设直线$l:x=my+1$

联立$\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3m^2+4)y^2+6my-9=0$

由韦达定理$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}\\ y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}\end{cases}$

$S_{\Delta F_1MN}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{\sqrt{36m^2+4\times9(3m^2+4)}}{3m^2+4}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$

令$t=\sqrt{m^2+1}\geq1$，则$S=\frac{12t}{3t^2+1}=\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}\leq\frac{12}{3+1}=4$

则面积最大值为4

（B） 已知点F_1,F_2分别是椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$的左，右焦点，点A,B分别是其右顶点和上顶点，$S_{\Delta F_2AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\overrightarrow{F_2A}\bullet\overrightarrow{F_2B}=-1$.

（1） 求椭圆C的方程；

（2） 若过点F_2的直线l与椭圆C相较于M,N两个不同点，求ΔF_1MN面积的最大值.

答案：（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ （2） 4

考点：解析几何综合

解析：

（1）$A(a,0),B(0,b),F_2(c,0)$

则$\frac{\sqrt{3}}{2}=S_{\Delta F_2AB}=\frac{1}{2}(a-c)b$, 即$ab-bc=\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{F_2A}=(a-c,0),\overrightarrow{F_2B}=(-c,b)$，$-1=\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=-c(a-c)=c(c-a)$

即$a=2,b=\sqrt{3},c=1$，方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）设直线$l:x=my+1$

联立$\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2+4)y^2+6my-9=0$

由韦达定理$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4} \\ y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4} \end{cases}$

$$S_{\Delta F_1MN}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\frac{\sqrt{36m^2+4\times9(3m^2+4)}}{3m^2+4}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$$

令$t=\sqrt{m^2+1}\geq1$，则$S=\dfrac{12t}{3t^2+1}=\dfrac{12}{3t+\dfrac{1}{t}}\leq\dfrac{12}{3+1}=4$

则面积最大值为4