20. （本题满分 12 分）

已知动圆 C 经过点 $(1,0)$，且与直线 $x=-1$ 相切，设圆心 C 的轨迹为 E.

（1）求曲线 E 的方程；

（2）若直线 l：$y=kx+m(m\neq 0)$ 与曲线 E 相交于 A，B 两个不同点，以 AB 为直径的圆经过原点，证明：直线 l 必过一个定点 .

21. （本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=2a\ln x+1, a\in R.\ (a\in R)$.

（1）求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的极值；

（2）当 $a=e$ 时，是否存在实数 k，m 使得不等式 $g(x)\le kx+m\le f(x)$ 恒成立？若存在，请求出实数的值，若不存在，请说明理由 .

请考生在第 **22**、**23** 两题中任选一题作答，如果两题都做，则按照所做的第一题给分；作答时，请用 **2B** 铅笔将答题卡上相应的题号涂黑。

22. （本题满分 10 分）选修 4-4：参数方程与极坐标系

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+2\cos\varphi, \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

（1）求曲线 C_1 普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

（2）已知曲线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\rho\in R)$，点 A 是曲线 C_3 与 C_1 的交点，点 B 是曲线 C_3 与 C_2 的交点，且 A，B 均异于原点 O，且 $|AB|=4\sqrt{2}$，求实数 a 的值 .

23. （本题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=2|x+a|+|x-\dfrac{1}{a}|\ (a\neq 0)$.

（1）当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x)<4$；

（2）求函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的最小值 .

数学（文科）参考答案

一、选择题：

1-5　BCAAC　6-10　DABBD　11.12　BA

二、填空题：

13.-2

14.0.4

15. $y=-x$ 或 $y=8x-18$

16. $\frac{13}{4}$

三、解答题：

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}(\cos\frac{2x}{3}+1)=\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，…………3 分

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 3π，…………4 分

令 $\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}k\pi$，

$\therefore f(x)$ 的对称中心为 $(-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}k\pi,\frac{1}{2})\ (k\in\mathbf{Z})$；…………6 分

（Ⅱ）$\because (2a-b)\cos C=c\cos B$，$\therefore 2\sin A\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin A$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A>0$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，…………8 分

$\therefore f(A)=\sin(\frac{2A}{3}+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$\therefore \sin(\frac{2A}{3}+\frac{\pi}{6})=1$，

$\therefore \frac{2A}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\therefore A=\frac{\pi}{2}$，…………10 分

$\therefore c=a\sin C=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$．…………12 分

18.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）由题意可得列联表如下：

	网购迷	非网购迷	合计
年龄不超过 40 岁	20	45	65
年龄超过 40 岁	5	30	35
合计	25	75	100

…………3 分

假设网购迷与年龄不超过 40 岁没有关系，…………4 分

则 $k=\dfrac{100\times(20\times30-45\times5)^2}{65\times35\times25\times75}=3.297>2.706$，

所以可以在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为网购迷与年龄不超过 40 岁有关；…… 6 分

（Ⅱ）由频数分布直方图可知，超级网购迷共有 7 名，记其中年龄超过 40 岁的 2 名市民为 A_1，A_2，其余 5 名市民记为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5， …… 8 分

则从超级网购迷中任意选取 2 名的所有结果为：(A_1,A_2)，(A_1,a_1)，(A_1,a_2)，(A_1,a_3)，(A_1,a_4)，(A_1,a_5)，(A_2,a_1)，(A_2,a_2)，(A_2,a_3)，(A_2,a_4)，(A_2,a_5)，(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,a_4)，(a_1,a_5)，(a_2,a_3)，(a_2,a_4)，(a_2,a_5)，(a_3,a_4)，(a_3,a_5)，(a_4,a_5)，共有 21 种；…… 10 分

其中至少有 1 名市民年龄超过 40 岁的结果为：(A_1,A_2)，(A_1,a_1)，(A_1,a_2)，(A_1,a_3)，(A_1,a_4)，(A_1,a_5)，(A_2,a_1)，(A_2,a_2)，(A_2,a_3)，(A_2,a_4)，(A_2,a_5)，共有 11 种；

$\therefore$ 从超级网购迷中任意选取 2 名至少有 1 名市民年龄超过 40 岁的概率为 $P=\dfrac{11}{21}$.…12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）证明：取 AC 的中点 F，连接 DF，EF，

$\because$ E 是 BC 的中点，$\therefore$ $EF\parallel AB$，

$\because$ $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱，$\therefore$ $AB\parallel A_1B_1$，

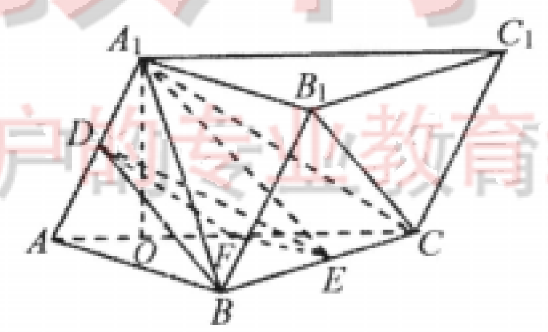
$\therefore$ $EF\parallel A_1B_1$，$\therefore$ $EF\parallel$ 平面 A_1B_1C， …… 2 分

$\because$ D 是 AA_1 的中点，$\therefore$ $DF\parallel A_1C$，$\therefore$ $DF\parallel$ 平面 A_1B_1C， …… 4 分

$\therefore$ 平面 $DEF\parallel$ 平面 A_1B_1C，

$\therefore$ $DE\parallel$ 平面 A_1B_1C； …… 6 分

（Ⅱ）过点 A_1 作 $A_1O\perp AC$，垂足为 O，连接 AE，



$\because$ 侧面 $ACC_1A_1\perp$ 底面 ABC，$\therefore$ $A_1O\perp$ 平面 ABC，

$\because$ $\angle A_1AC=60^\circ$，$AA_1=2$，$\therefore$ $OA_1=\sqrt{3}$，…… 8 分

$\because$ $AB=2$，$\angle BAC=60^\circ$，

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$， … 10 分

$\because$ 点 D，E 分别是 AA_1，BC 的中点，

$\therefore$ $V_{A_1-BDE}=V_{A-BDE}=V_{D-ABE}=\dfrac{1}{6}S_{\triangle ABE}\cdot OA_1=\dfrac{1}{12}S_{\triangle ABC}\cdot OA_1=\dfrac{1}{2}$.…12 分

20.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）由题意曲线 E 是以点 $(0,1)$ 为焦点，直线 $x=-1$ 为准线的抛物线， …… 2 分

设其方程为 $y^2=2px(p>0)$，$\because$ $\dfrac{p}{2}=1$，$\therefore$ $p=2$，

$\therefore$ 动点 C 的轨迹 E 的方程为 $y^2=4x$； …… 4 分

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=kx+m,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$,

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{4-2km}{k^2},x_1\cdot x_2=\dfrac{m^2}{k^2}$, ………………………… 6分

$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\therefore x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2+4km}{k^2}=0$,
………………………………………………………… 8分

$\therefore m=0$ 舍去或 $m=-4k$,满足 $\Delta=16(1-km)>0$, ………………… 10分

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$,

$\therefore$ 直线 l 必经过定点(4,0). ………………………………… 12分

21.(本小题满分12分)

解(Ⅰ)由题意得 $h(x)=x^2-2a\ln x,x>0,\therefore h'(x)=\dfrac{2(x^2-a)}{x}$, ………………… 1分

①当 $a\leqslant 0$ 时,则 $h'(x)>0$,此时 $h(x)$ 无极值; ………………………… 2分

②当 $a>0$ 时,令 $h'(x)<0$,则 $0<x<\sqrt{a}$;令 $h'(x)>0$,则 $x>\sqrt{a}$;

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\sqrt{a}]$ 上递减,在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上递增;

$\therefore h(x)$ 有极小值 $h(\sqrt{a})=a(1-\ln a)$,无极大值; ………………………… 4分

(Ⅱ)当 $a=e$ 时,$g(x)=2e\ln x+1$,由(Ⅰ)知,$h(x)$ 在 $(0,\sqrt{e}]$ 上递减,在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上递增,且有极小值 $h(\sqrt{e})=0$,

$\therefore f(x)=x^2+1$ 在 $x=\sqrt{e}$ 处的切线方程为 $y=2\sqrt{e}x+1-e$, ………………… 6分

令 $u(x)=f(x)-(2\sqrt{e}x+1-e),x>0$,

则 $u(x)=(x-\sqrt{e})^2\geqslant 0,\therefore 2\sqrt{e}x+1-e\leqslant f(x)$, ………………… 8分

令 $v(x)=2\sqrt{e}x+1-e-g(x)=2\sqrt{e}x-e-2e\ln x,x>0$,则 $v'(x)=\dfrac{2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})}{x}$,

令 $v'(x)<0$,则 $0<x<\sqrt{e}$;令 $v'(x)>0$,则 $x>\sqrt{e}$;

$\therefore v(x)\geqslant v(\sqrt{e})=2e-e-2e\ln\sqrt{e}=0,\therefore g(x)\leqslant 2\sqrt{e}x+1-e$, ……… 10分

$\therefore g(x)\leqslant 2\sqrt{e}x+1-e\leqslant f(x)$ ………………………………… 11分

$\therefore k=2\sqrt{e},m=1-e$. ………………………………………… 12分

22.(本小题满分10分)

解(Ⅰ)由 $\begin{cases}x=2+2\cos\varphi,\\y=2\sin\varphi\end{cases}$ 消去参数 φ 可得 C_1 普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$, ……… 2分

$\because \rho=4\sin\theta,\therefore \rho^2=4\rho\sin\theta$,

由$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$得曲线$C_2$的直角坐标方程为$x^2+(y-2)^2=4$, ……………………… 5分

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得曲线$C_1:(x-2)^2+y^2=4$,其极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$, ……………………… 6分

由题意设$A(\rho_1,\alpha)$, $B(\rho_2,\alpha)$,

则$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=4|\sin\alpha-\cos\alpha|=4\sqrt{2}|\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})|=4\sqrt{2}$, ……………… 8分

$\therefore \sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\pm1$, $\therefore \alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$, $\because 0<\alpha<\pi$, $\therefore \alpha=\frac{3\pi}{4}$. ……10分

23.(本小题满分10分)

解(Ⅰ) $\because a=1$, $\therefore$ 原不等式为$2|x+1|+|x-1|<4$,

$\therefore \begin{cases} x<-1 \\ -2x-2-x+1<4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x+2-x+1<4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>1, \\ 2x+2+x-1<4, \end{cases}$ …… 3分

$\therefore -\frac{5}{3}<x<-1$ 或 $-1\leqslant x<1$ 或 $\varnothing$,

$\therefore$ 原不等式的解集为$(-\frac{5}{3},1)$, …………………………………………………… 5分

(Ⅱ) 由题意得$g(x)=f(x)+f(-x)=2(|x+a|+|x-a|)+(|x+\frac{1}{a}|+|x-\frac{1}{a}|)$

$\geqslant 2|2a|+\frac{2}{|a|}=4|a|+\frac{2}{|a|}\geqslant 4\sqrt{2}$, ……………………………………… 8分

当且仅当$2|a|=\frac{1}{|a|}$,即$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,且$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$g(x)$取最小值$4\sqrt{2}$. …… 10分