山西省太原市 2017 届高三模拟考试（一）

数学（文）试题

第Ⅰ卷（共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|y=\lg(x+1)\}$，$B=\{x||x|<2\}$，则 $A\cap B=$（ ）

A. $(-2,0)$ B. $(0,2)$ C. $(1,2)$ D. $(-2,2)$

2. 复数 $\frac{2-i}{i}=$（ ）

A. $-1-2i$ B. $-1+2i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

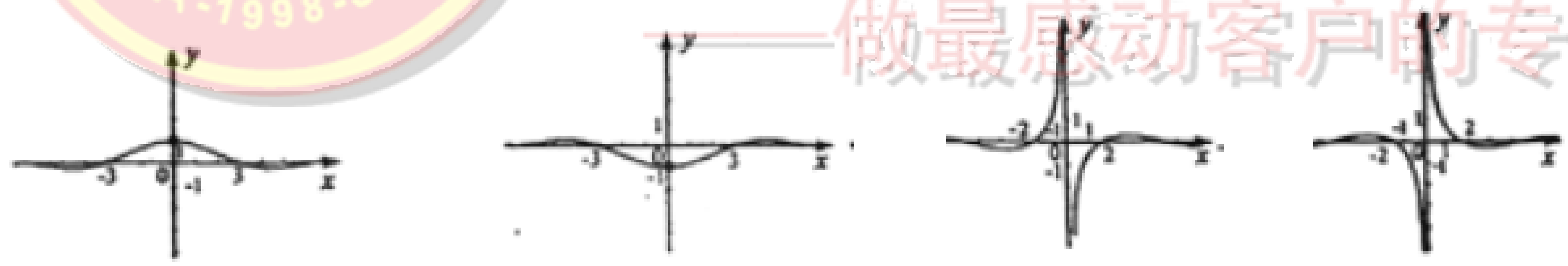
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$2(a_1+a_3+a_5)+3(a_8+a_{10})=36$，则 $a_6=$（ ）

A. 8 B. 6 C. 4 D. 3

4. 已知 $\vec{a}=(1,\cos\alpha)$，$\vec{b}=(\sin\alpha,1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\sin 2\alpha=$（ ）

A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

5. 函数 $f(x)=\frac{\cos x}{x}$ 的图像大致为（ ）

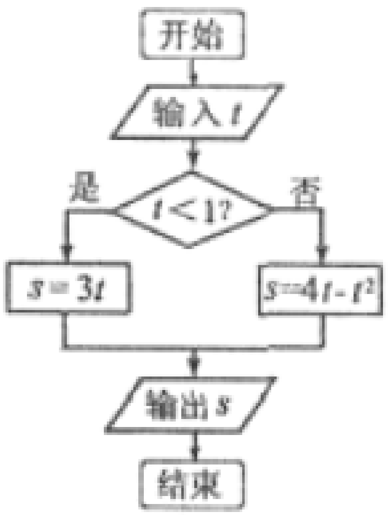


A B C. D

6. 已知圆 $C:x^2+y^2=1$，直线 $l:y=k(x+2)$，在 $[-1,1]$ 上随机选取一个数 k，则事件"直线 l 与圆 C 相离"发生的概率为（ ）

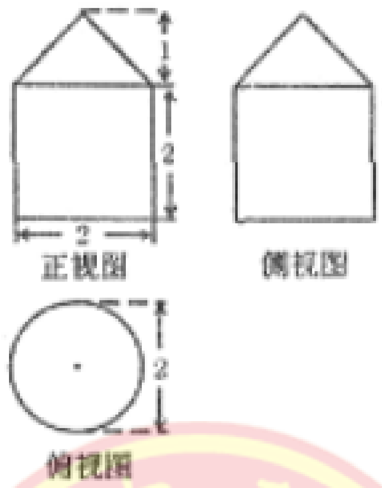
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

7. 执行如图的程序框图，已知输出的 $s\in[0,4]$。若输入的 $t\in[0,m]$，则实数 m 的最大值为（ ）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



A. $\frac{7\pi}{3}$　　B. $8+\frac{\pi}{3}$　　C. $(4+\sqrt{2})\pi$　　D. $(5+\sqrt{2})\pi$

9. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} 3x+y+3\geq 0, \\ 2x-y+2\leq 0, \\ x+2y-4\leq 0, \end{cases}$ 给出下列四个命题：则 $z=x^2+y^2$ 的取值范围为（　　）

A. $[1,13]$　　B. $[1,4]$　　C. $\left[\frac{4}{5},13\right]$　　D. $\left[\frac{4}{5},4\right]$

10. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，O 为坐标原点，若 $|AB|=6$，则 ΔAOB 的面积为（　　）

A. $\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

11. 已知函数 $f(x)=\sin wx-\sqrt{3}\cos wx\,(w>0)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且只有两个零点，则实数 w 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{4}{3}\right]$　　B. $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right]$　　C. $\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{10}{3},\frac{13}{3}\right]$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{f'(1)}{e}e^x+\frac{f(0)}{2}x^2-x$，若存在实数 m 使得不等式 $f(m)\leq 2n^2-n$ 成立，求实数 n 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[0,+\infty)$

第II卷（共 90 分）

二、填空题（每题 5分，满分 20 分，将答案填在答题纸上）

13. 已知 $\vec{a}=(1,-1)$，$\vec{b}=(t,1)$，若 $(\vec{a}+\vec{b})//(\vec{a}-\vec{b})$，则实数 $t=$__________.

14. 已知双曲线经过点 $(2\sqrt{2},1)$，其一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，则该双曲线的标准方程为__________.

15. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$平面 BCD，$BC\perp CD, BC=CD=1, AB=\sqrt{2}$，则该三棱锥外接球的体积为__________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+n-1(n\in N^*)$，则其前 n 项和 $S_n=$__________.

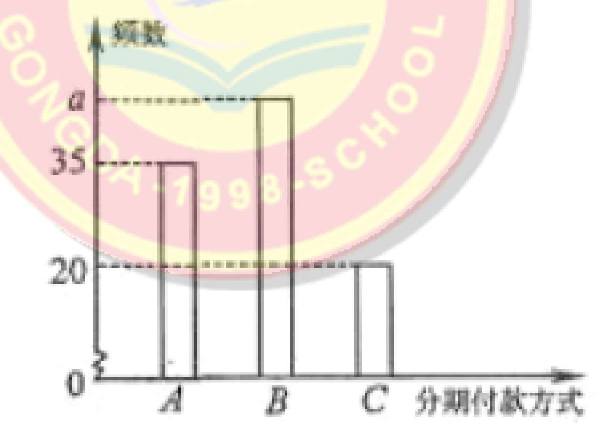
三、解答题 （本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤 .）

17. 已知 a,b,c 分别是 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边，$a=2b\cos B, b\neq c$.

（1）证明：$A=2B$；

（2）若 $a^2+c^2=b^2+2ac\sin C$，求 A.

18. 某知名品牌汽车深受消费者喜爱，但价格昂贵。某汽车经销商推出 A,B,C 三种分期付款方式销售该品牌汽车，并对近期 100 位采用上述分期付款的客户进行统计分析，得到如下的柱状图。已知从 A,B,C 三种分期付款销售中，该经销商每销售此品牌汽车 1 辆所获得的利润分别是 1 万元，2 万元，3 万元。以这 100 位客户所采用的分期付款方式的频率代替 1 位客户采用相应分期付款方式的概率。



（Ⅰ）求采用上述分期付款方式销售此品牌汽车 1 辆，该汽车经销商从中所获得的利润不大于 2 万元的概率；

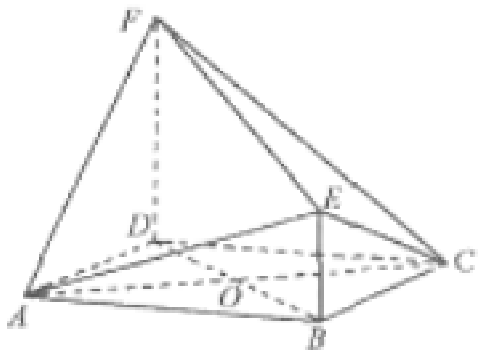
（Ⅱ）求采用上述分期付款方式销售此品牌汽车 1 辆，该汽车经销商从中所获得的利润的平均值；

（Ⅲ）根据某税收规定，该汽车经销商每月（按 30 天计）上交税收的标准如下表：

月利润(单位:万元)	在(0,100]内的部分	超过100且不超过150的部分	超过150的部分
税率	1%	2%	4%

若该经销商按上述分期付款方式每天平均销售此品牌汽车 3 辆，估计其月纯收入（纯收入 =总利润 - 上交税款）的平均值 .

19. 如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$BE\perp$平面 $ABCD$，$DF//BE$，且 $DF=2BE=2, EF=3$.



（1）证明：平面 $ACF\perp$ 平面 $BEFD$．

（2）若 $\cos\angle BAD=\frac{1}{5}$，求几何体 $ABCDEF$ 的体积．

20. 已知直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,P 两点，与 x 轴，y 轴分别相交于点 N 和点 M，且 $PM=MN$，点 Q 是点 P 关于 x 轴的对称点，QM 的延长线交椭圆于点 B，过点 A,B 分别做 x 轴的垂线，垂足分别为 A_1,B_1．

（1）若椭圆 C 的左、右焦点与其短轴的一个端点是正三角形的三个顶点，点 $D\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，求椭圆 C 的方程；

（2）当 $k=\frac{1}{2}$ 时，若点 N 平分线段 A_1B_1，求椭圆 C 的离心率．

21. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax+\frac{1}{x}(a\in R)$ 在 $x=2$ 处的切线经过点 $(-4,2\ln 2)$

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若不等式 $\frac{2\ln x}{1-x^2}>m-\frac{1}{x}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

22. 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$，（其中 φ 为参数），曲线 $C_2:x^2+y^2-2y=0$，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，射线 $l:\theta=\alpha(\rho\geq 0)$ 与曲线 C_1,C_2 分别交于点 A,B（均异于原点 O）

（1）求曲线 C_1,C_2 的极坐标方程；

（2）当 $0<a<\frac{\pi}{2}$ 时，求 $|OA|^2+|OB|^2$ 的取值范围．

23. 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-a|+\frac{1}{2a}(a\neq 0)$

（1）若不等式 $f(x)-f(x+m)\leq 1$ 恒成立，求实数 m 的最大值；

（2）当 $a<\frac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)=f(x)+|2x-1|$ 有零点，求实数 a 的取值范围．

试卷答案

一、选择题

1-5: CADBD 6-10: CDDCA 11、12：BA

二、填空题

13. -1 14. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 15. $\frac{4\pi}{3}$ 16. $2^{n+1}-2-\frac{n(n+1)}{2}$

三、解答题

17.（1）证明：∵ $a=2b\cos B$，由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin A=2\sin B\cos B=\sin 2B$，

$\because 0<A,B<\pi$，$\therefore \sin A=2\sin B>0$，$\therefore 0<2B<\pi$

$\therefore A=2B$ 或 $A+2B=\pi$，

若 $A+2B=\pi$，则 $B=C$，$b=c$ 这与“ $b\neq c$ ”矛盾， $A+2B\neq\pi$.

$\therefore A=2B$

（2）$\because a^2+c^2=b^2+2ac\sin C$，$\therefore \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\sin C$，

由余弦定理得 $\cos B=\sin C$，

$\because 0<B,C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{2}-B$ 或 $C=\dfrac{\pi}{2}+B$，

①当 $C=\dfrac{\pi}{2}-B$ 时，则 $A=\dfrac{\pi}{2}$，$B=C=\dfrac{\pi}{4}$，这与“ $b\neq c$ ”矛盾， $A\neq\dfrac{\pi}{2}$ ；

②当 $C=\dfrac{\pi}{2}+B$，由（1）得 $A=2B$，$\therefore A+B+C=A+2B+\dfrac{\pi}{2}=2A+\dfrac{\pi}{2}=\pi$，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$

18. 解：（Ⅰ）由题意得采用上述分期付款方式销售此品牌汽车 1 辆，该汽车经销商从中所获得的利润不大于 2 万元的概率为 $1-0.2=0.8$ ；

（Ⅱ）由题意得 $a=100-35-20=45$，

$\therefore$ 采用上述分期付款方式销售此品牌汽车 1 辆，该汽车经销商从中所获得的利润的平均值为 $1\times0.35+2\times0.45+3\times0.2=1.85$（万元）

（Ⅲ）由（Ⅱ）可得根据某税收规定，按上述分期付款方式每天平均销售此品牌汽车 3 辆，该经销商月利润为 $1.85\times3\times30=166.5$，

$\therefore$ 该经销商上交税款为 $100\times1\%+50\times2\%+16.5\times4\%=2.66$，

$\therefore$ 该经销商月纯收入的平均值为 $166.5-2.66=163.84$（万元）．

19.（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$

$\because BE\perp$ 平面 $ABCD$ $\therefore BE\perp AC$

$\therefore AC\perp$ 平面 $BEFD$

$\therefore$ 平面 $ACF\perp$ 平面 $BEFD$

（2）设 AC 与 BD 的交点为 O，$AB=a(a>0)$，

由（1）得 $AC\perp$ 平面 $BEFD$，

$\because BE\perp$ 平面 $ABCD$ $\therefore BE\perp BD$，

$\because DF//BE$，$\therefore DF\perp BD$，

$\therefore BD^2=EF^2-(DF-BE)^2=8$，$\therefore BD=2\sqrt{2}$

$\therefore S_{四边形BEFD}=\dfrac{1}{2}(BE+DF)\cdot BD=3\sqrt{2}$，

$\because \cos\angle BAD=\frac{1}{5}$，$\therefore BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD=\frac{8}{5}a^2=8$

$\therefore a=\sqrt{5}$，

$\therefore OA^2=AB^2-OB^2=3$，$\therefore OA=\sqrt{3}$

$\therefore V_{ABCDEF}=2V_{A-BEFD}=\frac{2}{3}S_{四边形BEFD}\ OA=2\sqrt{6}$.

20. 解（1）由题意得 $\begin{cases} b=\sqrt{3}c, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} b^2=3, \\ a^2=4, \end{cases}$

∴所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）当 $k=\frac{1}{2}$ 时，由 $y=\frac{1}{2}x+m$ 得

$M(0,m)$，$N(-2m,0)$，

$\because PM=MN$，

$\therefore P(2m,2m)$，$Q(2m,-2m)$，

∴直线 QM 的方程为 $y=-\frac{3}{2}x+m$，

设 $A(x_1,y_1)$，由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得 $\left(\frac{1}{4}a^2+b^2\right)x^2+a^2mx+a^2(m^2-b^2)=0$

$\therefore x_1+2m=\frac{-4a^2m}{a^2+4b^2}$，$\therefore x_1=-\frac{2m(3a^2+4b^2)}{a^2+4b^2}$

设 $B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得 $\left(\frac{9}{4}a^2+b^2\right)x^2-3a^2mx+a^2(m^2-b^2)=0$

$\therefore x_2+2m=\frac{12a^2m}{9a^2+4b^2}$，$\therefore x_2=-\frac{2m(3a^2+4b^2)}{9a^2+4b^2}$，

∵点 N 平分线段 A_1B_1，$\therefore x_1+x_2=-4m$，

$\therefore -\frac{2m(3a^2+4b^2)}{a^2+4b^2}-\frac{2m(3a^2+4b^2)}{9a^2+4b^2}=-4m$，$\therefore 3a^2=4b^2$，

$\therefore x_1=-3m, y_1=-\frac{1}{2}m$，代入椭圆方程得 $m^2=\frac{4}{7}b^2<b^2$，符合题意，

$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$．

21. 解（1）由题意得 $f'(x)=\frac{2}{x}+a-\frac{1}{x^2}, x>0$

$\therefore f'(2)=a+\frac{3}{4}$，

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

即 $y=\left(a+\frac{3}{4}\right)x+2\ln 2-1$，

$\because$ 点 $(-4,2\ln 2)$ 在该切线上，$\therefore a=-1$，

$\therefore f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\le 0$

函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

（2）由题意知 $x>0$ 且 $x\ne 1$，

原不等式 $\frac{2\ln x}{1-x^2}>m-\frac{1}{x}$ 等价于 $\frac{1}{1-x^2}\left(2\ln x-x+\frac{1}{x}\right)>m$，

设 $g(x)=\frac{1}{1-x^2}\left(2\ln x-x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x^2}f(x)$，

由（1）得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，且 $f(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0, g(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f(x)<0, g(x)>0$；

$\therefore g(x)>0$，

假设存在正数 b，使得 $g(x)>b>0$，

若 $0<b\le 1$，当 $x>\frac{1}{b}$ 时，$g(x)=\frac{2\ln x}{1-x^2}+\frac{1}{x}<\frac{1}{x}<b$；

若 $b>1$，当 $\frac{1}{b}<x<1$ 时，$g(x)=\frac{2\ln x}{1-x^2}+\frac{1}{x}<\frac{1}{x}<b$；

$\therefore$ 不存在这样的正数 b，使得 $g(x)>b>0$，$\therefore g(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty,0]$．

22. 解（1）$\because \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases}$，$\therefore \frac{x^2}{2}+y^2=1$，

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{2}{1+\sin^2\theta}$，

$\because x^2+y^2-2y=0$，∴曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$；

（2）由（1）得 $|OA|^2=\rho^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\alpha}$，$|OB|^2=\rho^2=4\sin^2\alpha$，

$\therefore |OA|^2+|OB|^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\alpha}+4\sin^2\alpha=\dfrac{2}{1+\sin^2\alpha}+4(1+\sin^2\alpha)-4$

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore 1<1+\sin^2\alpha<2$，$\therefore 6<\dfrac{2}{1+\sin^2\alpha}+4(1+\sin^2\alpha)<9$，

$\therefore |OA|^2+|OB|^2$ 的取值范围为 $(2,5)$.

23. 解：（1）$\because f(x)=|x-a|+\dfrac{1}{2a}$，$\therefore f(x+m)=|x+m-a|+\dfrac{1}{2a}$，

$\therefore f(x)-f(x+m)=|x-a|-|x+m-a|\le|m|$，

$\therefore |m|\le1$，$\therefore -1\le m\le1$，∴实数 m 的最大值为 1；

（2）当 $a<\dfrac{1}{2}$ 时，

$$g(x)=f(x)+|2x-1|=|x-a|+|2x-1|+\frac{1}{2a}=\begin{cases}-3x+a+\dfrac{1}{2a}+1, & x<a,\\ -x-a+\dfrac{1}{2a}+1, & a\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 3x-a+\dfrac{1}{2a}-1, & x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$\therefore g(x)_{min}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-a+\dfrac{1}{2a}=\dfrac{-2a^2+a+1}{2a}\le0$，

$\therefore \begin{cases}0<a<\dfrac{1}{2},\\ -2a^2+a+1\le0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ -2a^2+a+1\ge0\end{cases}$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\le a<0$，∴实数 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$