



山西省太原市 2017 届高三年级模拟试题 (一)

数学 (理科)

(考试时间: 下午 3:00—5:00)

注意事项:

1. 本试卷分第 卷 (选择题) 和第 卷 (非选择题) 两部分。
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题与答题卡相应的位置。
3. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第 卷

第 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的 .

1. 已知集合 $A = \{x | y = \lg(x+1)\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-2, 0)$ B. $(0, 2)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-2, -1)$

2. 已知 $zi = 2 - i$, 则复数 z 在复平面对应点的坐标是

- A. $(-1, -2)$ B. $(-1, 2)$ C. $(1, -2)$ D. $(1, 2)$

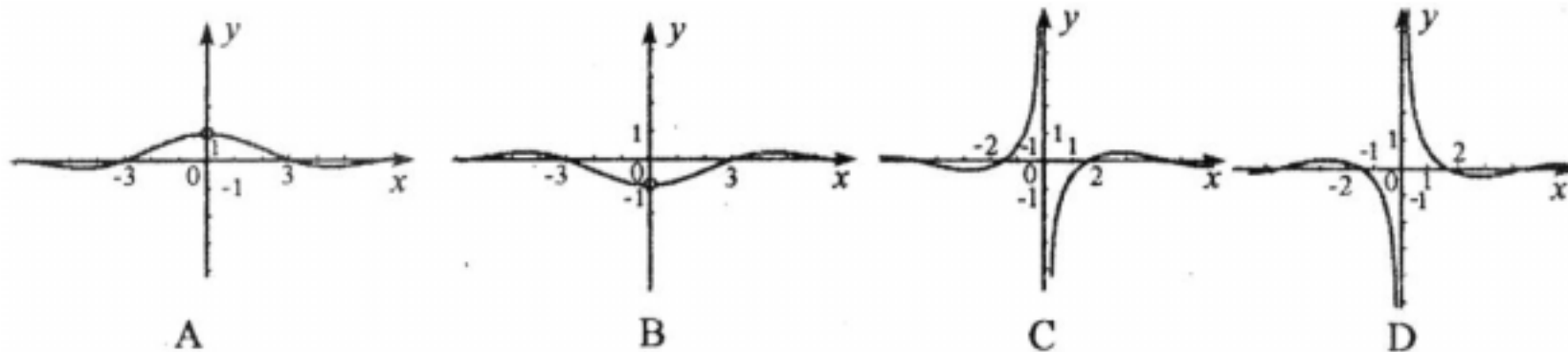
3. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 36$, 则 $S_{11} =$

- A. 66 B. 55 C. 44 D. 33

4. 已知 $a = (1, \cos \alpha)$, $b = (\sin \alpha, 1)$, 且 $0 < \alpha < \pi$, 若 $a \perp b$, 则 $\alpha =$

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

5. 函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ 的图象大致为



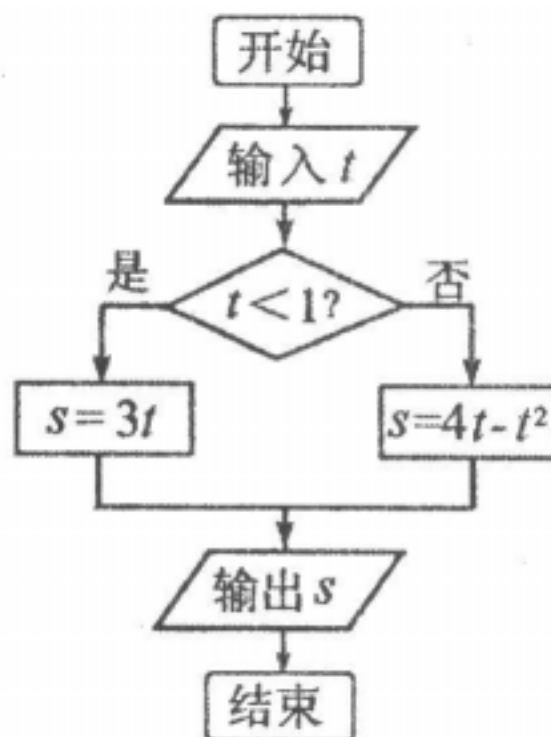
6. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: y = k(x+2)$, 在 $[-1, 1]$ 上随机选取一个数 k , 则事件“直线 l 与圆 C 相离”发生的概率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$



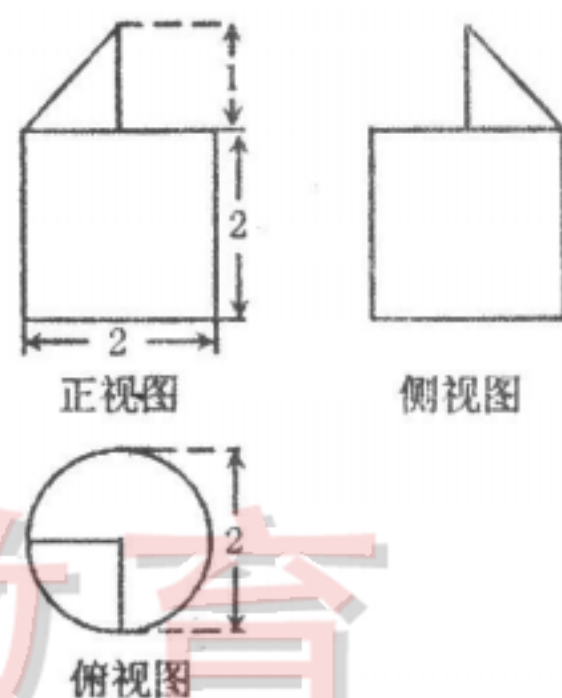
7. 执行右面的程序框图, 已知输出的 $s \in [0, 4]$, 若输入的 $t \in [m, n]$, 则实数 $n - m$ 的最大值为

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4



8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为

- A. $6\pi + 1$
B. $\frac{(24 + \sqrt{2})\pi}{4} + 1$
C. $\frac{(23 + \sqrt{2})\pi}{4} + \frac{1}{2}$
D. $\frac{(23 + \sqrt{2})\pi}{4} + 1$



9. 已知 $D = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - y + 2 \leq 0 \\ 3x - y + 6 \geq 0 \end{cases} \right\}$, 给出下列四个命题:

$P_1: \forall (x, y) \in D, x + y \geq 0; P_2: \forall (x, y) \in D, 2x - y + \leq 0;$

$P_3: \exists (x, y) \in D, \frac{y+1}{x-1} \leq -4; P_4: \exists (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq 2;$

其中真命题的是

- A. P_1, P_2 B. P_2, P_3 C. P_2, P_4 D. P_3, P_4

10. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为点 F , 过焦点 F 的直线交该抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{6}$, 则 $|AB| =$

- A. 6 B. 8 C. 12 D. 16

11. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$, 若方程 $f(x) = -1$ 在 $(0, \pi)$ 上有且只有四个实数根, 则实数 ω 的取值范围为

- A. $(\frac{13}{6}, \frac{7}{2}]$ B. $(\frac{7}{2}, \frac{25}{6}]$ C. $(\frac{25}{6}, \frac{11}{2}]$ D. $(\frac{11}{2}, \frac{37}{6}]$

12. 设函数 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2ax (a > 0)$ 与 $g(x) = a^2 \ln x + b$ 有公共点, 且在公共点处的切线方程相同, 则实数 b 的最大值为

- A. $\frac{1}{2e^2}$ B. $\frac{1}{2}e^2$ C. $\frac{1}{e}$ D. $-\frac{3}{2e^2}$



第 卷 (非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分, 第 13-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22-23 题为选考题, 考生根据要求作答。

二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上)

13. 已知 $a = (1, -1), b = (t, 1)$, 若 $a + b \parallel (a - b)$, 则实数 $t =$ _____

14. 已知双曲线经过点 $(1, 2\sqrt{2})$, 其一条渐近线方程为 $y = 2x$, 则该双曲线的标准方程为 _____

15. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $BC \perp CD$, $AB=AD=\sqrt{2}$, $BC=1$, $CD=\sqrt{3}$, 则该三棱锥外接球的体积为 _____

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1, a_{n+1} = 2a_n + 3n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则其前 n 项和 $S_n =$ _____

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边, $a = 2b \cos B$, $b \neq c$.

() 证明: $A=2B$

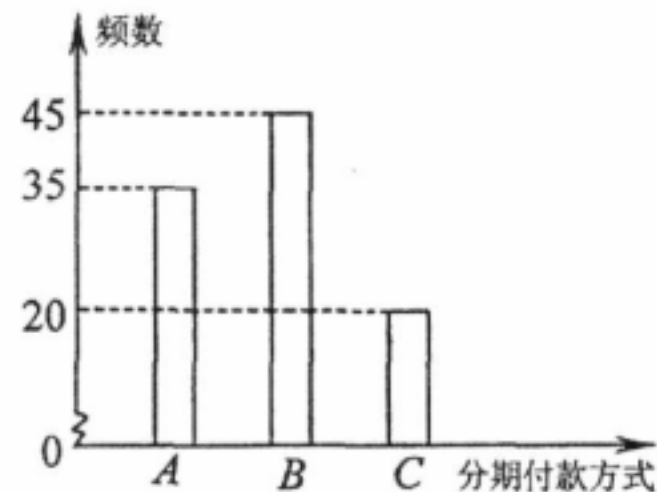
() 若 $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \sin C$, 求 A

18. (本小题满分 12 分)

某知名品牌汽车深受消费者喜爱, 但价格昂贵。某汽车经销商退出 A、B、C 三种分期付款销售该品牌汽车, 并对近期 100 位采用上述分期付款的客户进行统计分析, 得到如下的柱状图。已知从 A、B、C 三种分期付款销售中, 该经销商每销售此品牌汽车 1 辆所获得的利润分别是 1 万元, 2 万元, 3 万元。现甲乙两人从该汽车经销商处, 采用上述分期付款各购买此品牌汽车一辆。以这 100 位客户所采用的分期付款方式的频率代替 1 位客户采用相应分期付款方式的概率。

() 求甲乙两人采用不同分期付款方式的概率;

() 记 X (单位: 万元) 为该汽车经销商从甲乙两人购车中所获得的的利润, 求 X 的分布列与期望。

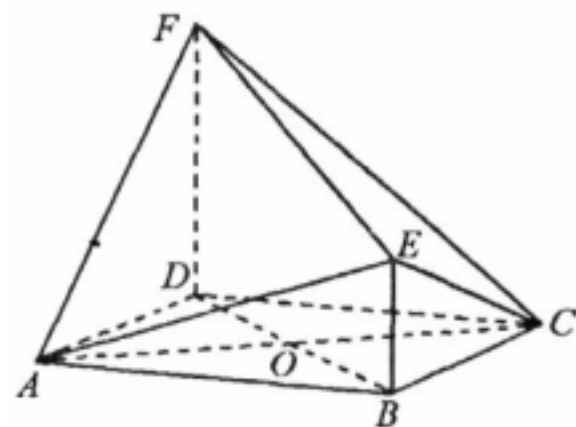


19. (本小题满分 12 分)

如图, 在几何体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $DF \parallel BE$, 且 $DF=2BE=2$, $EF=3$.

() 证明: 平面 $ACF \perp$ 平面 $BEFD$

() 若二面角 $A-EF-C$ 是直二面角, 求直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值。





20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点与其短轴的一个端点是正三角形的

三个顶点, 点 $D(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, P 两点, 与 x 轴、

y 轴分别相交于点 N 和 M , 且 $PM = MN$, 点 Q 是点 P 关于 x 轴的对称点, QM 的延长线交椭圆于点 B , 过点 A, B 分别作 x 轴的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1

() 求椭圆 C 的方程

() 是否存在直线 l , 使得点 N 平分线段 A_1B_1 ? 若存在, 求出直线 l 的方程, 若不存在, 请说明理由;

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2 \ln x + ax - \frac{4f'(x)}{x} (a \in \mathbb{R})$ 在 $x=2$ 处的切线经过点 $(-4, 2 \ln 2)$

() 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

() 若不等式 $\frac{2x \ln x}{1-x^2} > mx - 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围。

请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ (其中 φ 为参数), 曲线

$C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0$, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 射线

$l: \theta = \alpha (P \geq 0)$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于点 A, B (均异于原点 O)

() 求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程

() 当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, 求 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的取值范围。

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = x - a + \frac{1}{2a} (a \neq 0)$

() 若不等式 $f(x) - f(x+m) \leq 1$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

() 当 $a < \frac{1}{2}$, 函数 $g(x) = f(x) + |2x - 1|$ 有零点, 求实数 a 的取值范围。



数学 (理科) 参考答案

一、选择题

1-5: CADBD 6-10: CDDCA 11、12: BA

二、填空题

13. -1 14. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 15. $\frac{4\pi}{3}$ 16. $2^n + -2 - \frac{n(n+1)}{2}$

三、解答题 (本大题共 70 分)

17. (本题满分 12 分)

() 证明: $a = 2bc\cos B$, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin A = 2\sin B\cos B = \sin 2B$, 3 分

$0 < A, B < \pi$, $\sin A = 2\sin B > 0$, $0 < 2B < \pi$

$A = 2B$ 或 $A + 2B = \pi$, 4 分

若 $A + 2B = \pi$, 则 $B = C$, $b = c$ 这与 “ $b \neq c$ ” 矛盾, $A + 2B \neq \pi$ 5 分

$A = 2B$ 6 分

() $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac\sin C$, $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \sin C$,

由余弦定理得 $\cos B = \sin C$, 8 分

$0 < B, C < \pi$, $C = \frac{\pi}{2} - B$ 或 $C = \frac{\pi}{2} + B$, 9 分

当 $C = \frac{\pi}{2} - B$ 时, 则 $A = \frac{\pi}{2}$, $B = C = \frac{\pi}{4}$, 这与 “ $b \neq c$ ” 矛盾, $A \neq \frac{\pi}{2}$; 10 分

当 $C = \frac{\pi}{2} + B$, 由 (1) 得 $A = 2B$, $A + B + C = A + 2B + \frac{\pi}{2} = 2A + \frac{\pi}{2} = \pi$,

$A = \frac{\pi}{4}$ 12 分

18. (本题满分 12 分)

解 () 由柱状图可知, 1 位客户采用 A, B, C 三种分期付款方式的概率分别为

0.35, 0.45, 0.2, 2 分

则甲乙两人都采用 A 种分期付款方式的概率为 $0.35^2 = 0.1225$,

甲乙两人都采用 B 种分期付款方式的概率为 $0.45^2 = 0.2025$,

甲乙两人都采用 C 种分期付款方式的概率为 $0.2^2 = 0.04$,

∴ 甲乙两人所采用不同分期付款方式的概率为 $1 - 0.1225 - 0.2025 - 0.04 = 0.635$; ... 6 分

() 由题意得 X 所有可能取值分别为 2, 3, 4, 5, 6, 7 分



$$p(X = 2) = 0.35^2 = 0.1225, \quad p(X = 3) = 2 \times 0.35 \times 0.45 = 0.315$$

$$p(X = 4) = 2 \times 0.35 \times 0.2 + 0.45^2 = 0.3425, \quad p(X = 5) = 2 \times 0.45 \times 0.2 = 0.18$$

$$p(X = 6) = 0.2^2 = 0.04,$$

∴ X 的分布列为

X	2	3	4	5	6
P	0.1225	0.315	0.3425	0.18	0.04

..... 10分

$$\therefore EX = 2 \times 0.1225 + 3 \times 0.315 + 4 \times 0.3425 + 5 \times 0.18 + 6 \times 0.04 = 3.7 \dots 12分$$

19. (本小题满分 12分)

() 证明: ∵ 四边形 ABCD 是菱形, ∴ AC ⊥ BD,

∵ BE ⊥ 平面 ABCD ∴ BE ⊥ AC, 2分

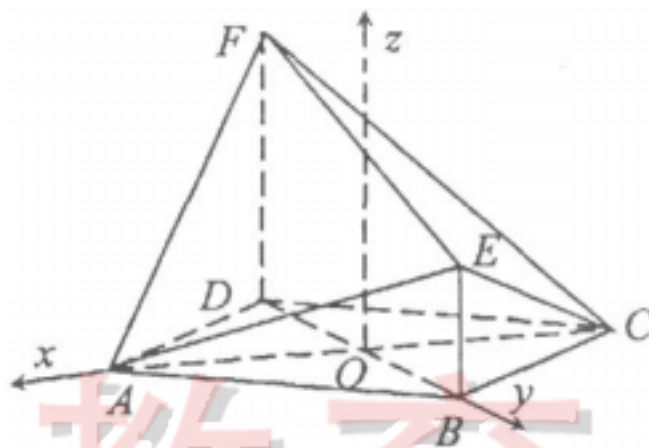
∴ AC ⊥ 平面 BEFD,

∴ 平面 ACF ⊥ 平面 BEFD 4分

() 设 AC 与 BD 的交点为 O, 由() 得 AC ⊥ BD,

分别以 OA OB 为 x 轴和 y 轴, 过点 O 垂直于平面

ABCD 的直线为 z 轴, 建立如图的空间直角坐标系 O - xyz, 5分



∵ BE ⊥ 平面 ABCD ∴ BE ⊥ BD,

∵ DF // BE, ∴ DF ⊥ BD,

$$\therefore BD^2 = EF^2 - (DF - BE)^2 = 8, \therefore BD = 2\sqrt{2},$$

设 OA = a (a > 0), 由题设可得 A(a, 0, 0), C(-a, 0, 0), E(0, √2, 1), F(0, -√2, 2), ... 7分

设 m = (x₁, y₁, z₁) 是平面 AEF 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2\sqrt{2}y_1 - z_1 = 0, \\ ax_1 - \sqrt{2}y_1 - z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } z_1 = 2\sqrt{2} \therefore m = \left(\frac{3\sqrt{2}}{a}, 1, 2\sqrt{2}\right), \dots 8分$$

设 n = (x₂, y₂, z₂) 是平面 CEF 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2\sqrt{2}y_2 - z_2 = 0, \\ ax_2 + \sqrt{2}y_2 + z_2 = 0, \end{cases} \text{ 令 } z_2 = 2\sqrt{2} \therefore n = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{a}, 1, 2\sqrt{2}\right),$$



∵ 二面角 A-EF-C 是直二面角, ∴ $m \cdot n = -\frac{18}{a^2} + 9 = 0 \therefore a = \sqrt{2}, \dots$ 10分

∵ BE ⊥ 平面 ABCD ∴ ∠BAE 是直线 AE 与平面 ABCD 的所成角,

∴ $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2 \therefore \tan \angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2} \dots\dots$ 12分

20. (本小题满分 12分)

解 () 由题意得
$$\begin{cases} b = \sqrt{3}c, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \dots\dots 2分 \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$

∴ $\begin{cases} b^2 = 3, \\ a^2 = 4, \end{cases} \therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \dots\dots 4分$

() 存在这样的直线 $l: y = kx + m. \therefore M(0, m) N(-\frac{m}{k}, 0),$

∵ PM = MN ∴ $P(\frac{m}{k}, 2m) Q(\frac{m}{k}, -2m)$

∴ 直线 QM 的方程为 $y = -3kx + m, \dots\dots 5分$

设 $A(x_1, y_1)$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 3) = 0,$

∴ $x_1 + \frac{m}{k} = -\frac{8km}{3 + 4k^2} \therefore x_1 = -\frac{3m(1 + 4k^2)}{k(3 + 4k^2)}, \dots\dots 7分$

设 $B(x_2, y_2)$. 由 $\begin{cases} y = -3kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(3 + 36k^2)x^2 - 24kmx + 4(m^2 - 3) = 0.$

∴ $x_2 + \frac{m}{k} = \frac{8km}{1 + 12k^2}, \therefore x_2 = -\frac{m(1 + 4k^2)}{k(1 + 12k^2)}, \dots\dots 9分$

∵ 点 N 平分线段 $AB_1, \therefore x_1 + x_2 = -\frac{2m}{k},$

∴ $-\frac{3m(1 + 4k^2)}{k(3 + 4k^2)} - \frac{m(1 + 4k^2)}{k(1 + 12k^2)} = -\frac{2m}{k} \therefore k = \pm \frac{1}{2}, \dots\dots 10分$

∴ $p(\pm 2m, 2m) \therefore \frac{4m^2}{4} + \frac{4m^2}{3} = 1 \therefore m = \pm \frac{\sqrt{21}}{7}, \dots\dots 11分$

∴ $|m| = \frac{\sqrt{21}}{7} < b = \sqrt{3} \therefore \Delta > 0$, 符合题意,



∴ 直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x \pm \frac{\sqrt{21}}{7}$ 12分

21. (本小题满分 12分)

解 () 由题意得 $f'(x) = \frac{2}{x} + a - \frac{1}{x^2}, x > 0$ 2分

, $f'(2) = 1 + a + f'(2), \therefore a = -1$

$f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

即 $y = f'(2)x + 2\ln 2 - 2 - 4f'(2)$,

点 $(-4, 2\ln 2)$ 在该切线上, $f'(2) = -\frac{1}{4}$, 4分

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{-(x-1)^2}{x^2} \leq 0$$

∴ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 6分

() 由题意知 $x > 0$ 且 $x \neq 1$,

原不等式 $\frac{2x \ln x}{1-x^2} > mx - 1$ 等价于 $\frac{1}{1-x^2}(2\ln x - x + \frac{1}{x}) > m$, 7分

设 $g(x) = \frac{1}{1-x^2}(2\ln x - x + \frac{1}{x}) = \frac{1}{1-x^2} f(x)$,

由 () 得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 且 $f(1) = 0$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) > 0, g(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0, g(x) > 0$;

$g(x) > 0$, 10分

假设存在正数 b , 使得 $g(x) > b > 0$,

若 $0 < b \leq 1$, 当 $x > \frac{1}{b}$ 时, $g(x) = \frac{2\ln x}{1-x^2} + \frac{1}{x} < \frac{1}{x} < b$;

若 $b > 1$, 当 $\frac{1}{b} < x < 1$ 时, $g(x) = \frac{2\ln x}{1-x^2} + \frac{1}{x} < \frac{1}{x} < b$;

不存在这样的正数 b , 使得 $g(x) > b > 0$, $g(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$

m 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ 12分

22. (本小题满分 10分)

解 () $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}, \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \dots\dots\dots 1分$



由 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$, 3分

$x^2 + y^2 - 2y = 0$, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta$; 5分

() 由 (1) 得 $|OA|^2 = \rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha}$, $|OB|^2 = \rho^2 = 4 \sin^2 \alpha$,

$|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha} + 4 \sin^2 \alpha = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha} + 4(1 + \sin^2 \alpha) - 4$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $1 < 1 + \sin^2 \alpha < 2$, $6 < \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha} + 4(1 + \sin^2 \alpha) < 9$,

$|OA|^2 + |OB|^2$ 的取值范围为 $(2, 5)$ 10分

23. 解: () $f(x) = |x - a| + \frac{1}{2a}$, $f(x + m) = |x + m - a| + \frac{1}{2a}$,

$f(x) - f(x + m) = |x - a| - |x + m - a| \leq |m|$, 3分

$|m| \leq 1$, $-1 \leq m \leq 1$, 实数 m 的最大值为 1; 5分

() 当 $a < \frac{1}{2}$ 时,

$g(x) = f(x) + |2x - 1| = |x - a| + |2x - 1| + \frac{1}{2a} = \begin{cases} -3x + a + \frac{1}{2a} + 1, & x < a, \\ -x - a + \frac{1}{2a} + 1, & a \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x - a + \frac{1}{2a} - 1, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$

$g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - a + \frac{1}{2a} = \frac{-2a^2 + a + 1}{2a} \leq 0$, 8分

$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ -2a^2 + a + 1 \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0, \\ -2a^2 + a + 1 \geq 0 \end{cases}$

$-\frac{1}{2} \leq a < 0$, 实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 0)$ 10分