(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q．由题意可得 $\frac{5}{3}q^3=\frac{q^2+q^4}{2}$，解得 $q_1=\frac{1}{3}, q_2=3$．因为数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的单调递增等比数列,所以 $q=3, a_n=3^{n-1}$

(2)由题意可得, $b_n=\log_3\left(3^{n-1}\cdot 3^n\right)=2n-1$．则 $a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

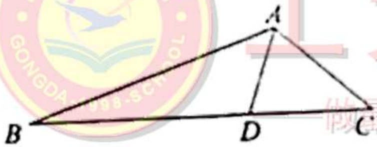
$S_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+5\cdot 3^2+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-2}+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$3S_n=\quad 1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$

则 $-2S_n=1\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$，则 $S_n=1+(n-1)\cdot 3^n, n\in N^*$

18. (本小题满分 12 分)如图，已知 AD 是 ΔABC 内角 $\angle BAC$ 的角平分线

（1）用正弦定理证明：$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$；（2）若 $\angle BAC=120^\circ$，$AB=2, AC=1$，求 AD 的长



考点：正余弦定理

解析：(1) $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线， $\therefore \angle BAD=\angle CAD$

根据正弦定理，在 ΔABD 中， $\frac{\sin\angle BAD}{BD}=\frac{\sin\angle ADB}{BA}$

在 ΔADC 中， $\frac{\sin\angle DAC}{DC}=\frac{\sin\angle ADC}{AC}$

$\because \sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle ADC)=\sin\angle ADC$

$\therefore \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\frac{DB}{AB}, \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{AC}, \therefore \frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$

（2）根据余弦定理， $\cos\angle BAC=\frac{BA^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$，即

$\cos 120^\circ=\dfrac{2^2+1^2-BC^2}{2\times2\times1}$, $BC=\sqrt{7}$

$\because\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$, $\therefore\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{2}{1}$, $CD=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $BD=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

设 $AD=x$,则在 ΔABD 与 ΔADC 中，根据余弦定理

$\cos 60^\circ=\dfrac{1+x^2-(\frac{\sqrt{7}}{3})^2}{2\cdot x\cdot 1}$, $\cos 60^\circ=\dfrac{2^2+x^2-(\frac{2\sqrt{7}}{3})^2}{2\cdot x\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}}$

解得 $x=\dfrac{2}{3}$ ，因此 $AD=\dfrac{2}{3}$

19. 甲乙两人玩一种游戏，游戏规则如下：先将筹码放在如下表的正中间 D 处，投掷一枚质地均匀的硬币，若正面朝上，筹码向右移动一格；若反面朝上，筹码向左移动一格.

A	B	C	D	E	F	G
30	5	10	10	5	20	30

(Ⅰ) 将硬币连续投掷三次，现约定：若筹码停在 A 或 B 或 C 或 D 处，则甲赢；否则，乙赢. 问该约定对乙公平吗？请说明理由.

(Ⅱ) 设甲乙两人各有 100 个积分，筹码停在 D 处，现规定：

①投掷一次硬币，甲付给乙 10 个积分；乙付给甲的积分数是，按照上述游戏规则筹码所在表中字母 A~G 下方所对应的数目；

②每次游戏筹码都连续走三步，之后重新回到起始位置 D 处.

你认为该规定对甲乙两人中哪一个有利？请说明理由.

考点：游戏公平性；列表法或树状图法；分布列

解析：(Ⅰ) 该约定对乙公平.

$D\to C\to B\to A$; $D\to C\to B\to C$; $D\to C\to D\to E$; $D\to C\to D\to C$;
$D\to E\to F\to G$; $D\to E\to F\to E$; $D\to E\to D\to E$; $D\to E\to D\to C$.

将硬币连续投掷三次，共有上述 8 种情况，其中筹码停在 A 或 B 或 C 或 D 处有 4 种情况，即筹码停在 A 或 B 或 C 或 D 处的概率为 $P=\dfrac{1}{2}$. 所以，该约定对乙公平.

(Ⅱ) 该规定对甲有利.

根据(Ⅰ)中所列的8中情况可得乙付给甲的积分数可能是：20，25，30，45，55.

设乙付给甲的积分数为X，可得分布列为：

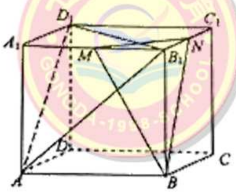
X	20	25	30	45	55
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X)=\frac{1}{8}\times20+\frac{3}{8}\times25+\frac{2}{8}\times30+\frac{1}{8}\times45+\frac{1}{8}\times55=\frac{255}{8}>30$. 所以，该规定对甲有利.

20. 如图，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N分别为棱A_1B_1，B_1C_1的中点，平面$ABCD\perp$平面A_1B_1BA，平面$ABCD\perp$平面B_1BCC_1.

(1) 求证$B_1B\perp$平面$ABCD$

(2) 若四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长均为$\sqrt{5}$，$cos\angle BAD=\frac{3}{5}$，设平面$BMN$与平面$AB_1D_1$相交所成的二面角大小为θ，求$cos\theta$.



考点：立体几何垂直证明；空间二面角

解析：

(1)证明：过点D作$DP\perp AB$，过点D作$DQ\perp BC$

由平面$ABCD\perp$平面A_1B_1BA，$BB_1\subseteq$平面A_1B_1BA得$DP\perp BB_1$

由平面$ABCD\perp$平面B_1BCC_1，$BB_1\subseteq$平面B_1BCC_1得$DQ\perp BB_1$

又$DP\cap DQ=D$，故$BB_1\perp$平面$ABCD$

(2)解：由$AB=AD=\sqrt{5}$，且$cos\angle BAD=\frac{3}{5}$，

在ΔABD中利用余弦定理可得：$BD=2$

设AC与BD的交点O，A_1C_1与B_1D_1的交点为O_1

以O为坐标原点，分别以OA,OB,OO_1所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系

则$B(0,1,0)$，$M(1,\frac{1}{2},\sqrt{5})$，$N(-1,\frac{1}{2},\sqrt{5})$，$C(-2,0,0)$，$A_1(2,0,\sqrt{5})$，$A(2,0,0)$，

$B_1(0,1,\sqrt{5})$，$D_1(0,-1,\sqrt{5})$

设平面BMN的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{BM}=(1,-\frac{1}{2},\sqrt{5})$，$\overrightarrow{MN}=(-2,0,0)$

由$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BM}=\vec{0}$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{0}$ 解得$\overrightarrow{n_1}=(0,10,\sqrt{5})$

设平面BMN的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2,1,\sqrt{5})$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(0,-2,0)$

由$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\vec{0}$，$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=\vec{0}$ 解得$\overrightarrow{n_2}=(5,0,2\sqrt{5})$

故$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2\sqrt{21}}{63}$

21.已知函数$f(x)=\frac{x}{e^x}+ax\ln x(a\in R)$在$x=1$处的切线方程为$y=bx+1+\frac{1}{e}(b\in R)$.

（1）求a,b的值；

（2）证明：$f(x)<\frac{2}{e}$；

（3）若正实数m,n满足$mn=1$，证明：$\frac{1}{e^{m-1}}+\frac{1}{e^{n-1}}<2(m+n)$.

解：（1）$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+a\ln x+a$

$f'(1)=a=$ i，又$f(1)=\frac{1}{e}=b+1+\frac{1}{e}$

$\therefore a=b=-1$

（2）$f(x)=\frac{x}{e^x}-x\ln x<\frac{2}{e}$，即$\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}<x\ln x$

令$g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$，则$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$

因此，$g(x)$在$(0,1)$单调递增；$(1,+\infty)$单调递减

$g(x)$最大值为$g(1)=-\frac{1}{e}$，当且仅当$x=1$时等号成立

又令$h(x)=x\ln x$，则$h'(x)=\ln x+1$

因此，$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$单调递减；$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$单调递增.

$h(x)$ 最小值为 $h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时等号成立

因此，$\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}<x\ln x$，即 $f(x)<\frac{2}{e}$

（3）由（2）得，$\frac{m}{e^m}-m\ln m<\frac{2}{e}$，即 $\frac{1}{e^m}-\ln m<\frac{2}{me}$

两边同乘以 e，得：$\frac{1}{e^{m-1}}-e\ln m<\frac{2}{m}$----------①

同理：$\frac{1}{e^{n-1}}-e\ln n<\frac{2}{n}$----------②

①+②，得：$\frac{1}{e^{m-1}}+\frac{1}{e^{n-1}}<e(\ln m+\ln n)+2(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})=2\frac{m+n}{mn}=2(m+n)$

原式得证.

选做题

22.已知平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(1,0)$，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，倾斜角为 α 的直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha$.

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）若曲线 C 与直线 l 交于 M,N 两点，且 $\left|\frac{1}{|PM|}-\frac{1}{|PN|}\right|=\frac{1}{3}$，求 α 的值.

考点：坐标系与参数方程

解析：

（1）曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$，由 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha$

$\rho\sin\alpha\cdot\cos\theta-\rho\cos\alpha\cdot\sin\theta=\sin\alpha$

$(x-1)\cdot\sin\alpha=y\cdot\cos\alpha$

$(x-1)\cdot\tan\alpha=y$

$y=x\cdot\tan\alpha-\tan\alpha$

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=x\cdot\tan\alpha-\tan\alpha$.

（2）直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cdot\cos\alpha\\ y=t\cdot\sin\alpha\end{cases}$代入$C$可得

$$(3\sin^2\alpha+1)\cdot t^2+2\cos\alpha\cdot t-3=0\Rightarrow\begin{cases}t_1+t_2=-\dfrac{2\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+1}\\ t_1\cdot t_2=-\dfrac{3}{3\sin^2\alpha+1}\end{cases},$$

由$\left|\dfrac{1}{|PM|}-\dfrac{1}{|PN|}\right|=\dfrac{1}{3}$可得$\left|\dfrac{|PM|-|PN|}{|PM|\cdot|PN|}\right|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3|t_1+t_2|=|t_1\cdot t_2|$

即$\left|\dfrac{-6\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+1}\right|=\left|\dfrac{-3}{3\sin^2\alpha+1}\right|\Rightarrow|\cos\alpha|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\alpha=60^\circ$或$\alpha=120^\circ$.

23.（本小题满分10分）选修4—5：不等式选讲

已知实数a，b，c均大于0.

（1）求证：$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le a+b+c$；

（2）若$a+b+c=1$，求证：$\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{2bc}{b+c}+\dfrac{2ca}{c+a}\le 1$.

考点：基本不等式的应用，简单的推理能力

解析：

（1）$\because a$，b，$c>0$，由基本不等式，得：$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$c+a\ge 2\sqrt{ca}$，

以上三式相加，得：$2(a+b+c)\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

即$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c$，原式得证.

（2）$\because a+b\ge 2\sqrt{ab}$，$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$c+a\ge 2\sqrt{ca}$

$$\therefore\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\le\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{2bc}{2\sqrt{bc}}+\frac{2ca}{2\sqrt{ca}}$$

$$=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

由（1），得 $\le a+b+c=1$，原式得证.