# 太原市2016-2017学年第一学期高二年级期末考试

## 数学试卷（理科）

### （考试时间：上午8:00-9:30）

一、选择题（本大题共12小题，每小题3分，共36分）

1.命题"若$x>2$，则$x>1$"的逆否命题为（　　）

A.若$x<2$，则$x<1$　　B. 若$x\le 2$，则$x\le 1$

C.若$x\le 1$，则$x\le 2$　　D. 若$x<1$，则$x<2$

| |
|---|
| 答案：C |
| 考点：命题的逆否命题 |
| 解析：命题"若$p$则$q$"的逆否命题为"若$\neg q$则$\neg p$"，故C正确. |

2.抛物线$y^2=8x$的准线方程为（　　）

A.$x=2$　　B. $x=-2$　　C.$y=-2$　　D. $y=2$

| |
|---|
| 答案：B |
| 考点：抛物线的准线方程 |
| 解析：抛物线$y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，由$y^2=8x$有$2p=8$，则$p=4$，所以准线方程为$x=-\frac{p}{2}=-2$，B正确. |

3.已知空间向量$\vec{a}=(0,1,1),\vec{b}=(-1,0,1)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A.$\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

| |
|---|
| 答案：A |
| 考点：向量积运算 |
| 解析：由题可知，$\|\vec{a}\|=\sqrt{2},\|\vec{b}\|=\sqrt{2}$，则$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{1}{2}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，A正确. |

4.焦点在$x$轴上，且渐近线方程为$y=\pm 2x$的双曲线方程是（　　）

A.$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

C.$\frac{y^2}{4}-x^2=1$　　D. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

| |
|---|
| 答案：A |
| 考点：双曲线方程及其渐近线方程 |
| 解析：焦点在 $x$ 轴上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，选项 A 符合题意. |

5.已知直线 $a,b$ 和平面 $\alpha$，且 $b\subset\alpha$，那么“$a//b$”是“$a//\alpha$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

| |
|---|
| 答案：D |
| 考点：异面直线平行判断 |
| 解析：由线面平行的判定定理可知，直线必须在平面外，所以前不能推后，后也不能推前. |

6.已知椭圆 $C$ 经过点 $(1,0)$，$(0,2)$，则椭圆 $C$ 的标准方程为（　　）

A. $x^2+\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

C. $x^2+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$



| |
|---|
| 答案：C |
| 考点：椭圆的标准方程 |
| 解析：由题可知，椭圆的焦点在 $y$ 轴上，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a)$，又 $a=1,b=2$，故椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，选 C. |

7.已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$ 的左右焦点分别为 $F_1,F_2$，直线 $l$ 过 $F_2$ 且与椭圆交于不同的两点 $A$、$B$，那么 $\Delta ABF_1$ 的周长为（　　）

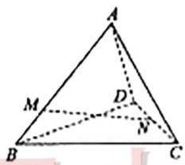
A.是定值 4
B.是定值 8
C.不是定值，与直线 $l$ 的倾斜角有关
D.不是定值，与 $b$ 的取值大小有关

| 答案：B |
| --- |
| 考点：椭圆第一定义 |
| 解析：由椭圆第一定义可知，椭圆上任意一点到两焦点的距离之和为定值 $2a$，故 $\|AF_1\|+\|AF_2\|=2a,\|BF\|_1+\|BF_2\|=2a$，所以三角形 $ABF_1$ 的周长为 $4a=8$，故选 B |

8.如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，点 $M$ 在 $AB$ 上，且 $AM=\dfrac{2}{3}AB$，

点 $N$ 为 $CD$ 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　　）

A.$\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　B.$-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　C.$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　D.$-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$






| 答案：B |
| --- |
| 考点：向量运算 |
| 解析：连接 AN，因为 ABCD 为四面体，可得 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$，又因为 $AM=\dfrac{2}{3}AB$，即 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$，故选 B |

9.对于双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 和 $C_2:\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$，给出下列四个结论：

（1）离心率相等；（2）渐近线相同；（3）没有公共交点；（4）焦距相等.其中正确结论为（　　）

A.（1）（2）（4）　　B.（1）（3）（4）　　C.（2）（3）（4）　　D.（2）（4）

| 答案：C |
| --- |
| 考点：双曲线的性质 |
| 解析：由双曲线性质 $c^2=a^2+b^2, y=\pm\dfrac{b}{a}$ 可知两条双曲线焦距相等，渐近线相同，由于双曲线无限靠近渐近线但不会相交，故而两条双曲线没有公共点 |

10.已知 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3),\overrightarrow{OB}=(2,1,2),\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，点 $Q$ 在 $OP$ 上，那么当 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 取得最小值时，点 $Q$ 的坐标为（　　）

A.$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{3})$　　B.$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{3})$　　C.$(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3})$　　D.$(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3})$

答案：C

考点：共线向量

解析：由 Q 在 OP 上，可知 $\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 向量共线，由共线向量定义可知，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$，由选项可知选 C

11. 若圆 $C$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 内切，与圆 $x^2+y^2-8x+12=0$ 外切，则圆 $C$ 的圆心在（　）

A. 一个椭圆上　　B. 双曲线的一支上

C. 一条抛物线上　　D. 一个圆上

答案：B

考点：圆与圆的位置关系及其判定

解析：设动圆圆心为 $P$，半径为 $r$，而圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 1；圆 $x^2+y^2-8x+12=0$ 的圆心为 $Q(4,0)$，半径为 2. 由题意可得：$|CO|=r-1$，$|CQ|=r+1$，$|CQ|-|CO|=2<|OQ|=4$，所以点 $P$ 的轨迹为双曲线的一支.

12. 已知 $p$："$\forall x\in[1,2],x^2-a\ge0$"，$q$："$\exists x\in R$，使得 $x^2+2ax+2-a=0$"，那么命题"$p\wedge q$"为真命题的充要条件为

A. $a\le-2$ 或 $a=1$　　B. $a\le-2$ 或 $1\le a\le2$　　C. $a\ge1$　　D. $-2\le a\le1$

答案：A

考点：复合命题真假判断；恒成立与存在

解析：$p$：$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\ge0$ 恒成立，

等价于 $a\le x^2$ 在 $x\in[1,2]$ 恒成立，即 $a\le(x^2)_{min}=1$

故当 $p$ 为真命题，$a\le1$

$\neg q$："$\forall x\in R$，$x^2+2ax+2-a\ne0$"

若 $\neg q$ 成立，则 $\Delta=(2a)^2-4(2-a)=4a^2+4a-8<0$

解得 $-2<a<1$

故当 $q$ 为真命题，$a\le-2$ 或 $a\ge1$

综上：由 $p\wedge q$"为真命题可得：$a\le-2$ 或 $a=1$，选 A

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

13.双曲线$x^2-y^2=1$的离心率为______.

| |
|---|
| 答案：$\sqrt{2}$ |
| 考点：双曲线的离心率 |
| 解析：$a^2+b^2=c^2=2,c=\sqrt{2}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$. |

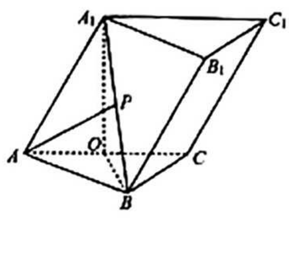
14.命题“若$\lvert x\rvert\neq 3$，则$x\neq 3$”的真假为______.(填“真”或“假”)

| |
|---|
| 答案：真 |
| 考点：命题真假性判断 |
| 解析：逆否命题为“若$x=3$，则$\lvert x\rvert=3$”为真，故该命题为真. |

15.椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$的焦点为$F_1,F_2$，点$P$在椭圆上，若$\lvert PF_1\rvert=4$，则$\angle F_1PF_2=$______.

| |
|---|
| 答案：$120°$ |
| 考点：椭圆第一定义及余弦定理 |
| 解析：点$P$在椭圆上，$\lvert PF_1\rvert+\lvert PF_2\rvert=2a=6,\lvert PF_2\rvert=2,\lvert F_1F_2\rvert=2c=2\sqrt{7}$. $\cos\angle F_1PF_2=\frac{\lvert PF_1\rvert^2+\lvert PF_2\rvert^2-\lvert F_1F_2\rvert^2}{2\lvert PF_1\rvert\lvert PF_2\rvert}=\frac{16+4-28}{16}=-\frac{1}{2}$. 所以，$\angle F_1PF_2=120°$. |

16.如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点$A_1$在平面$ABC$内的射影$O$为$AC$的中点，$A_1O=2,AB\perp BC,AB=BC=\sqrt{2}$，点$P$在线段$A_1B$上，且$\cos\angle PAO=\frac{2}{3}$，则直线$AP$与平面$A_1AC$所成角的正弦值为______.



答案：$\frac{1}{3}$

考点：利用空间向量的方法计算线面角

解析：此题用传统方法会比较简单，

在 $Rt\Delta APO$ 中，$AO=1,\cos\angle PAO=\frac{2}{3}$，可解得 $AP=\frac{3}{2},OP=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

在 $Rt\Delta A_1BO$ 中，可算得 $A_1B=\sqrt{5}$，

于是有 $OP=\frac{1}{2}A_1B$，可知，$P$ 此时为 $A_1B$ 的中点；

连结 $P$ 与 $A_1O$ 的中点 $D$，于是 $PD \parallel OB$，而 $OB\perp$ 平面 $A_1AC$，所以 $PD\perp$ 平面 $A_1AC$，

所以可以知道 $\angle PAD$ 就是直线 $AP$ 与平面 $A_1AC$ 所成角.

在 $Rt\Delta PAD$ 中，$AP=\frac{3}{2},PD=\frac{1}{2},\sin\angle PAD=\frac{PD}{AP}=\frac{1}{3}$.

不过此题放到这里出题人的意图应该是想让同学们使用空间向量方法求解，这种方法思维简单不过计算复杂，同学们可自行尝试.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 48 分）

17.（本小题满分 8 分）

已知命题：$p:\forall x\in R,|x|+x\ge 0$；$q$:关于 $x$ 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根.

(1) 写出命题 $p$ 的否定，并判断命题 $p$ 的否定的真假；

(2) 若命题"$p\wedge q$"为假命题，求实数 $m$ 的取值范围.

考点：命题的否定，命题真假判断以及复合命题真假判断

解析：(1) 命题 $p$ 的否定形式 $\neg p$：$\exists x_0\in R,|x_0|+x_0<0$.

对于命题 $p$，$\forall x\in R$，恒有 $|x|+x\ge 0$，故 $p$ 为真，则 $\neg p$ 为假.

(2)由于 $p$ 为真，$p\wedge q$ 为假，则 $q$ 为假，即关于 $x$ 的方程 $x^2+mx+1=0$ 没有实数根，

所以 $\Delta=b^2-4ac=m^2-4<0$，解得 $-2<m<2$.

故实数 $m$ 的取值范围为 $-2<m<2$.

18.（本小题满分 10 分）

已知空间四点 $A(2,0,0)$，$B(0,2,1)$，$C(1,1,1)$，$D(-1,m,n)$

（1） 若 $AB//CD$，求实数 $m$，$n$ 的值

（2） 若 $m+n=1$，且直线 $AB$ 和 $CD$ 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求实数 $m$ 的值

| 考点：共线向量与直线夹角 |
|---|
| 解析：（1）因为 AB//CD，所以向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ 共线，所以 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$，由已知解得：<br>$\overrightarrow{AB}=(-2,2,1),\overrightarrow{CD}=(-2,m-1,n-1)$，可得 $m-1=2$，$n-1=1$<br>得到 $m=3$，$n=2$<br>（2）因为 $m+n=1$，可得 $n=1-m$<br>$\overrightarrow{AB}=(-2,2,1),\overrightarrow{CD}=(-2,m-1,-m)$<br>设 $AB$ 与 $CD$ 的夹角为 $\theta$<br>则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\lvert AB\rvert\lvert CD\rvert}=\frac{m-2}{3\cdot\sqrt{4+(m-1)^2+m^2}}=\frac{1}{3}$，解得 $m=3\pm2\sqrt{2}$ |

19.（本小题满分 10 分）

已知抛物线 $C$：$y^2=2px(p>0)$ 上一点 $M(1,y)$ 到焦点 $F$ 的距离是 $\frac{17}{16}$

（1） 求 $p$ 的值；

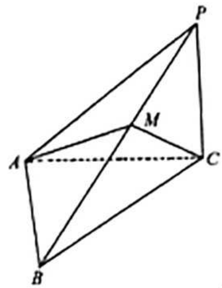
（2） 若圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 与抛物线 $C$ 有四个不同的公共点，求实数 $a$ 的取值范围.

| 考点：抛物线定义与圆的综合 |
|---|
| 解析：（1）由抛物线的定义可知到焦点的距离等于到准线的距离，所以点 M 到准线的距离为 $\frac{17}{16}$，所以可知准线方程为 $x=-\frac{1}{16}$，所以 $p=\frac{1}{8}$<br>（2）由抛物线与椭圆有四个交点，可以联立圆的方程与抛物线的方程可得<br>$(x-a)^2+\frac{1}{4}x=1$<br>若有四个公共交点，方程必有两个不等的实数根<br>由根的分布可知<br>$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2>0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<\frac{65}{16}\\a>\frac{1}{8}\\a>1或a<-1\end{cases}$ 得出 $a$ 的取值范围为 $(1,\frac{65}{16})$ |

20.（A）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PC\perp$ 平面 $ABC$，$\angle ACB=45^\circ$，$BC=2\sqrt{2}$，$AB=2$.

（1）求 $AC$ 的长；

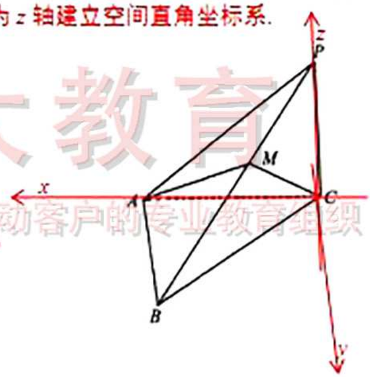
（2）若 $PC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，点 $M$ 在侧棱 $PB$ 上，且 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，当 $\lambda$ 为何值时，二面角 $B-AC-M$ 的大小为 $30^\circ$.




考点：二面角及其求法

（1）在 $\Delta ACB$ 中，$\cos 45^\circ=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{AC^2+8-4}{4\sqrt{2}AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=2$.

（2）由(1)可知：$AB\perp AC$，又因为 $PC\perp$ 平面 $ABC$，所以以 $CA$ 所在直线为 $x$ 轴，过点 $C$ 且与 $AB$ 平行的直线为 $y$ 轴，$CP$ 所在直线为 $z$ 轴建立空间直角坐标系.




可得：$C(0,0,0),A(2,0,0),B(2,2,0),P(0,0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

设点 $M(x_0,y_0,z_0)$，

$\overrightarrow{BM}=(x_0-2,y_0-2,z_0),\overrightarrow{MP}=(-x_0,-y_0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-z_0)$，

由 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MP}$ 可得：$M(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2\sqrt{3}}{3(1+\lambda)})$.

平面 $ABC$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，设平面 $ACM$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{CA}=(2,0,0),\overrightarrow{CM}=(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2\sqrt{3}}{3(1+\lambda)})$，

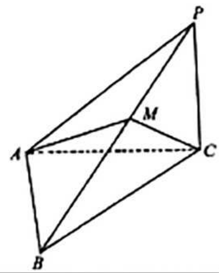
$$\begin{cases}2x=0\\ \dfrac{2}{1+\lambda}x+\dfrac{2}{1+\lambda}y+\dfrac{2\sqrt{3}}{3(1+\lambda)}z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(0,-\sqrt{3},3).$$

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3\lambda^2+9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$\lambda=1$.

（B）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PC\perp$ 平面 $ABC$，$\angle APB=30^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，$BC=2\sqrt{2}$，$PA\perp AB$.

（1）求 $PC$ 的长；

（2）若点 $M$ 在侧棱 $PB$ 上，且 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，当 $\lambda$ 为何值时，二面角 $B-AC-M$ 的大小为 $30^\circ$.



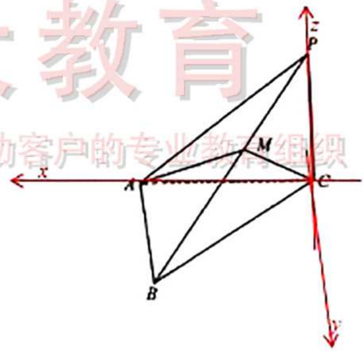

考点：二面角及其求法

解析：(1) 由 $PC\perp$ 平面 $ABC$，$PC\perp AB, PA\perp AB, PA\cap PC=P$，所以 $AB\perp$ 平面 $PAC$.

$AB\perp AC$，$\angle ACB=45^\circ$，所以 $\Delta ABC$ 为等腰直角三角形，$AB=AC=2$，在 $\Delta ABP$ 中，

$\angle APB=30^\circ$，所以 $PC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 由(1)可知：$AB\perp AC$，又因为 $PC\perp$ 平面 $ABC$，所以以 $CA$ 所在直线为 $x$ 轴，过点 $C$ 且与 $AB$ 平行的直线为 $y$ 轴，$CP$ 所在直线为 $z$ 轴建立空间直角坐标系.




可得：$C(0,0,0), A(2,0,0), B(2,2,0), P(0,0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

设点 $M(x_0,y_0,z_0)$，

$\overrightarrow{BM}=(x_0-2,y_0-2,z_0),\overrightarrow{MP}=(-x_0,-y_0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-z_0)$，

由 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MP}$ 可得：$M(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2\sqrt{3}}{3(1+\lambda)})$.

平面 $ABC$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，设平面 $ACM$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{CA}=(2,0,0),\overrightarrow{CM}=(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2\sqrt{3}}{3(1+\lambda)})$，

$$\begin{cases}2x=0\\ \dfrac{2}{1+\lambda}x+\dfrac{2}{1+\lambda}y+\dfrac{2\sqrt{3}}{3(1+\lambda)}z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=(0,-\sqrt{3},3).$$

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3\lambda^2-9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$\lambda=1$.

21.(A). 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 $F$，椭圆与 $y$ 轴的正半轴交于点 $B$，且 $|BF|=\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 $E$ 的方程；

（2）若斜率为 1 的直线经过点 $(1,0)$，与椭圆 $E$ 相交于两个不同两点 $M,N$. 在椭圆 $E$ 上是否存在点 $P$，使得 $\Delta PMN$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，请说明理由.

考点：求椭圆方程；椭圆中的存在性问题

解析：

（1）$|BF|=a=\sqrt{2}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore c=1$

$\therefore b^2=a^2-c^2=1$

$E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）设直线 $MN$ 方程为 $y=x-1$

与椭圆方程联立得 $M(0,-1),N(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，$|MN|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

又 $S=\dfrac{1}{2}h|MN|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\therefore h=1$

设直线 $y=x+m$ 与直线 $MN$ 距离为 1

$\therefore \dfrac{|m+1|}{\sqrt{2}}=1,m=1\pm\sqrt{2}$

又直线 $y=x+n$ 与椭圆有交点，则代入椭圆方程，消元

$\dfrac{3}{2}x^2+2nx+c^2-1=0$，$\Delta=4n^2-6(n^2-1)\ge 0,\therefore -\sqrt{3}\le n\le\sqrt{3}$

$m$ 在这个范围内，因此存在这样的点 $P$

(B)已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过焦点且垂直于$x$轴的直线被椭圆$E$截得的线段长为$\sqrt{2}$.

（1）求椭圆$E$的方程；

（2）斜率为$k$的直线$l$经过原点$O$，与椭圆$E$相交于不同两点$M,N$，判断并说明在椭圆$E$上是否存在点$P$，使得$\Delta PMN$的面积为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

| 考点：求椭圆方程；椭圆中的存在性问题 |
| --- |

解析：

（1）根据题意可知：离心率为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，通径为$2\cdot\frac{b^2}{a}=\sqrt{2}$，可解得$a=\sqrt{2},b=1,c=1$。

故所求椭圆方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）存在点$P$，使得$PMN$的面积为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

联立$\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2-2=0$，可求出$|MN|=2\sqrt{\frac{2(1+k^2)}{1+2k^2}}$

接下来我们计算椭圆上一点到直线$l$的距离的最大值，也就是$\Delta PMN$中以$MN$为底时高的最大值：

设直线$y=kx+t$，当此直线与椭圆相切时，切点到直线$l$的距离最大.

联立$\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，

根据$\Delta=16k^2t^2-4(2t^2-2)(1+2k^2)=0$解得$t^2=1+2k^2$

此时切点到直线$l$的距离为$\sqrt{\frac{1-2k^2}{1+k^2}}$

那么$\Delta PMN$面积的最大值就是$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+2k^2}{1+k^2}}\cdot2\sqrt{\frac{2(1+k^2)}{1+2k^2}}=\sqrt{2}$