2015-2016学年山西省太原市高一（下）期末数学试卷

一、选择题（每题3分）

1．若 $a>b$，则下列结论正确的是（　　）

A．$ac>bc$　B．$a^2>b^2$　C．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　D．$a-1>b-2$

2．不等式 $x(x-2)>0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　B．$(-2,0)$　C．$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$　D．$(0,2)$

3．等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$d=2$，则 $a_5=$（　　）

A．9　B．11　C．16　D．32

4．在△ABC中，$a=4$，$b=6$，$C=60°$，则 $c=$（　　）

A．$2\sqrt{7}$　B．8　C．$6\sqrt{2}$　D．$2\sqrt{19}$

5．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_4=8$，则 $S_6=$（　　）

A．31　B．63　C．127　D．511

6．在△ABC中，$a=3$，$b=3\sqrt{2}$，$A=30°$，则 $B=$（　　）

A．45°　B．135°　C．45°或135°　D．75°或105°

7．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n，$a_5+a_7=14$，则 $S_{11}=$（　　）

A．140　B．70　C．154　D．77

8．已知不等式 $x^2-x-6<0$ 的解集为A，不等式 $x^2-5x+4<0$ 的解集是B，$A\cap B$ 是不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集，则 $a-b=$（　　）

A．-7　B．-5　C．1　D．5

9．设△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则△ABC的形状为（　　）

A．锐角三角形　B．直角三角形　C．钝角三角形　D．不确定

10．已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$B=\{x|(x-m)[x-(m+2)]>0\}$，若 $A\cup B=R$，则实数m的取值范围是（　　）

A．$(-1,+\infty)$　B．$(-\infty,2)$　C．$(-1,2)$　D．$[-1,2]$

11．已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项和 $S_n=\frac{n(3n-1)}{2}$，若 a_1，a_4，a_m 成等比数列，则 $m=$（　　）

A．19　B．34　C．100　D．484

12．已知实数a，b，c满足 $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$，则a的最大值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

二、填空题（每题4分）

13．3与12的等比中项为____________.

14．已知△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，∠A=60°，∠B=45°，$a=3$，则 $b=$____________.

15．若不等式 $kx^2+kx-\frac{3}{4}<0$ 对一切实数 x 都成立，则 k 的取值范围是____________．

16．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$（$n\in N^*$），则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$____________．

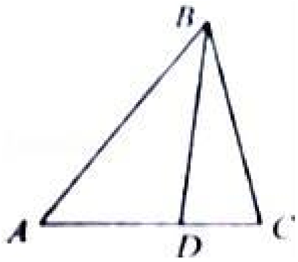
三、解答题

17．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_3=14$，$a_4-a_1=6$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_1$，$b_3=a_3$，若 $b_6=a_m$，求实数 m 的值．

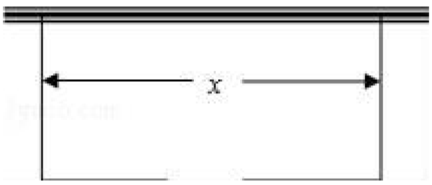
18．如图，在△ABC 中，AB=8，A=60°，点 D 在 AC 上，CD=2，$\cos\angle BDC=\frac{1}{7}$，求 BD，BC．



19．如图，围建一个面积为 $100m^2$ 的矩形场地，要求矩形场地的一面利用旧墙（旧墙需维修），其余三面围墙要新建，在旧墙的对面的新墙上要留一个宽度为 2m 的进出口，已知旧墙的维修费用为 56 元/米，新墙的造价为 200 元/米，设利用的旧墙长度为 x（单位：米），修建此矩形场地围墙的总费用 y（单位：元）

（1）将 y 表示为 x 的函数；

（2）求当 x 为何值时，y 取得最小值，并求出此最小值．



在 20、21 两个小题中任选一题作答

20．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$

（1）求角 C 的值；

（2）若 a=8，c=7，求△ABC 的面积．

21．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b\sin A\sin C-\sqrt{3}a\sin B\cos C=0$

（1）求角 C 的值；

（2）若 a=8，c=7，求△ABC 的面积．

在 22、23 两个小题中任选一题作答

22．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $S_{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n+\frac{n+1}{2}$（$n\in N^*$）

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $a_n=2^{n-1}b_n$（$n\in N^*$），数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\geqslant k$ 对于 $n\in N^*$恒成立，求实数 k 的最大值．

23．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{n}S_n+\frac{1}{2}(n+1)$（$n\in N^*$）

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $a_n=2^{n-1}b_n$（$n\in N^*$），数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\geqslant k-\frac{9}{2^n}$对于 $n\in N^*$恒成立，求整数 k 的最大值．

2015-2016学年山西省太原市高一（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每题3分）

1．若a＞b，则下列结论正确的是（　　）

A．ac＞bc　B．$a^2＞b^2$　C．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　D．a﹣1＞b﹣2

【考点】不等式的基本性质．

【分析】根据不等式的基本性质，逐一分析四个答案的真假，可得答案

【解答】解：对于A：若c≤0，则不成立，

对于B：若a=1，b=﹣2，则不成立，

对于C：若a=1，b=﹣2，则不成立，

对于D：由a＞b则a﹣1＞b﹣1＞b﹣2，故D成立，

故选：D．

2．不等式x（x﹣2）＞0的解集是（　　）

A．（﹣∞，﹣2）∪（0，+∞）　B．（﹣2，0）　C．（﹣∞，0）∪（2，+∞）　D．（0，2）

【考点】一元二次不等式的解法．

【分析】根据一元二次不等式的解法与步骤，进行解答即可．

【解答】解：不等式x（x﹣2）＞0，

解得x＞2或x＜0，

所以不等式的解集是（﹣∞，0）∪（2，+∞）．

故选：C．

3．等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，d=2，则$a_5=$（　　）

A．9　B．11　C．16　D．32

【考点】等差数列的通项公式．

【分析】由已知利用等差数列通项公式求解．

【解答】解：∵等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，d=2，

∴$a_5=a_1+4d=1+4\times2=9$．

故选：A．

4．在△ABC中，a=4，b=6，C=60°，则c=（　　）

A．$2\sqrt{7}$　B．8　C．$6\sqrt{2}$　D．$2\sqrt{19}$

【考点】余弦定理．

【分析】由已知利用余弦定理即可计算得解．

【解答】解：在△ABC中，∵a=4，b=6，C=60°，

∴由余弦定理可得：$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos60°}=2\sqrt{7}$．

故选：A．

5．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_4=8$，则$S_6=$（　　）

A．31　B．63　C．127　D．511

【考点】等比数列的前 n 项和．

【分析】由等比数列通项公式求出公比 q=2，由此利用等比数列前 n 项和公式能求出 S_6．

【解答】解：∵在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_4=8$，

$\therefore a_4=a_1q^3=q^3=8$，

解得 q=2，

$\therefore S_6=\frac{1-q^6}{1-q}=\frac{1-2^6}{1-2}=63$．

故选：B．

6．在△ABC 中，a=3，$b=3\sqrt{2}$，A=30°，则 B=（　　）

A．45°　B．135°　C．45°或 135°　　D．75°或 105°

【考点】正弦定理．

【分析】根据已知利用正弦定理可求 sinB，结合 B 的范围即可得解 B 的值．

【解答】解：在△ABC 中，∵a=3，$b=3\sqrt{2}$，A=30°，

∴由正弦定理可得：$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}=\frac{3\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

∵a＜b，B∈（30°，180°），

∴B=45°或 135°．

故选：C．

7．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_5+a_7=14$，则$S_{11}=$（　　）

A．140　B．70　C．154　D．77

【考点】等差数列的前 n 项和．

【分析】利用等差数列的前 n 项和公式和等差数列的性质能求出 S_{11}．

【解答】解：∵等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_5+a_7=14$，

$\therefore S_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=\frac{11}{2}(a_5+a_7)=\frac{11}{2}\times14=77$．

故选：D．

8．已知不等式$x^2-x-6<0$的解集为 A，不等式$x^2-5x+4<0$的解集是 B，A∩B 是不等式$x^2+ax+b<0$的解集，则 a﹣b=（　　）

A．﹣7　B．﹣5　C．1　　D．5

【考点】一元二次不等式的解法．

【分析】求出不等式的解集 A、B，计算 A∩B，再由根与系数的关系求出 a、b 的值．

【解答】解：不等式$x^2-x-6<0$的解集为$A=\{x|-2<x<3\}$，

不等式$x^2-5x+4<0$的解集是$B=\{x|1<x<4\}$，

所以$A\cap B=\{x|1<x<3\}$，

所以不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $\{x|1<x<3\}$，

所以 $a=-(1+3)=-4$，

$b=1\times3=3$；

$a-b=-4-3=-7$．

故选：A．

9．设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 bcosC+ccosB=asinA，则△ABC 的形状为（　　）

A．锐角三角形　B．直角三角形　C．钝角三角形　D．不确定

【考点】正弦定理．

【分析】由条件利用正弦定理可得 sinBcosC+sinCcosB=sinAsinA，再由两角和的正弦公式、诱导公式求得 sinA=1，可得 $A=\frac{\pi}{2}$，由此可得△ABC 的形状．

【解答】解：△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，

∵bcosC+ccosB=asinA，则由正弦定理可得 sinBcosC+sinCcosB=sinAsinA，

即 sin（B+C）=sinAsinA，可得 sinA=1，故 $A=\frac{\pi}{2}$，故三角形为直角三角形，

故选 B．

10．已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$B=\{x|(x-m)[x-(m+2)]>0\}$，若 $A\cup B=R$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-1,+\infty)$　B．$(-\infty,2)$　C．$(-1,2)$　D．$[-1,2]$

【考点】集合的包含关系判断及应用．

【分析】解不等式求出集合 A，B，结合 $A\cup B=R$，可得实数 m 的取值范围．

【解答】解：集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}=(-1,4)$，

集合 $B=\{x|(x-m)[x-(m+2)]>0\}=(-\infty,m)\cup(m+2,+\infty)$，

若 $A\cup B=R$，

则 $\begin{cases}m>-1\\m+2<4\end{cases}$，

解得：$m\in(-1,2)$，

故选：C

11．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(3n-1)}{2}$，若 a_1，a_4，a_m 成等比数列，则 m=（　　）

A．19　B．34　C．100　D．484

【考点】等比数列的通项公式．

【分析】$S_n=\frac{n(3n-1)}{2}$，可得 $a_1=1$；$n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$．由 a_1，a_4，a_m 成等比数列，可得 $a_4^2=a_1a_m$，代入解出即可得出．

【解答】解：∵$S_n=\frac{n(3n-1)}{2}$，∴$a_1=1$；

$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(3n-1)}{2}-\frac{(n-1)(3n-4)}{2}=3n-2$．$n=1$ 时也成立．

∴$a_n=3n-2$．

∵a_1，a_4，a_m 成等比数列，

∴ $a_4^2=a_1a_m$，

∴$10^2=1\times(3m-2)$，

解得 $m=34$．

故选：B．

12．已知实数 a，b，c 满足 $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$，则 a 的最大值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$ B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$ C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【考点】函数与方程的综合运用；函数的最值及其几何意义．

【分析】由已知条件 $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$，变形后，得到 bc 与 b+c 的值，利用完全平方式将变形后的式子代入推出 b、c 是二次方程的两个实数根，利用根的判别式得到有关 a 的不等式后确定 a 的取值范围．

【解答】解：∵$a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$，

∴$b+c=-a$，$b^2+c^2=1-a^2$，

∴$bc=\frac{1}{2}\cdot(2bc)$

$=\frac{1}{2}[(b+c)^2-(b^2+c^2)]$

$=a^2-\frac{1}{2}$

∴b、c 是方程：$x^2+ax+a^2-\frac{1}{2}=0$ 的两个实数根，

∴$\triangle\geqslant 0$

∴$a^2-4(a^2-\frac{1}{2})\geqslant 0$

即 $a^2\leqslant\frac{2}{3}$

∴ $-\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$

即 a 的最大值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

故选：B．

二、填空题（每题 4 分）

13．3 与 12 的等比中项为 ±6 ．

【考点】等比数列的通项公式．

【分析】利用等比数列的通项公式及其性质即可得出．

【解答】解：设 3 与 12 的等比中项为 x，

则 $x^2=3\times 12$，

解得 $x=\pm 6$．

故答案为：± 6．

14．已知△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$a=3$，则 $b=$__$\sqrt{6}$__．

【考点】正弦定理．

【分析】由已知利用正弦定理即可解得 b 的值．

【解答】解：∵$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$a=3$，

∴由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得：$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}$．

故答案为：$\sqrt{6}$．

15．若不等式 $kx^2+kx-\frac{3}{4}<0$ 对一切实数 x 都成立，则 k 的取值范围是__（－3，0]__．

【考点】一元二次不等式的解法．

【分析】根据不等式 $kx^2+kx-\frac{3}{4}<0$ 对一切实数 x 都成立，讨论 k=0 和 k≠0 时，即可求出 k 的取值范围．

【解答】解：不等式 $kx^2+kx-\frac{3}{4}<0$ 对一切实数 x 都成立，

$k=0$ 时，不等式化为 $-\frac{3}{4}<0$ 恒成立，

$k\neq 0$ 时，应满足$\begin{cases}k<0\\ k^2-4\cdot k\cdot(-\frac{3}{4})<0\end{cases}$，

解得 $-3<k<0$．

综上，不等式 $kx^2+kx-\frac{3}{4}<0$ 对一切实数 x 都成立的 k 的取值范围是（－3，0]．

故答案为：（－3，0]．

16．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$（$n\in N^*$），则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=$__$\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$__．

【考点】数列的求和．

【分析】可设 $a_{n+1}+t=3(a_n+t)$，求得 $t=\frac{1}{2}$，运用等比数列的通项公式，可得数列$\{a_n\}$的通项，再由数列的求和方法：分组求和，结合等比数列的求和公式，化简即可得到所求和．

【解答】解：由 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$，

可设 $a_{n+1}+t=3（a_n+t）$，

即 $a_{n+1}=3a_n+2t$，可得 $2t=1$，即 $t=\frac{1}{2}$，

则 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3（a_n+\frac{1}{2}）$，

可得数列 $\{a_n+\frac{1}{2}\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列，

即有 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\bullet 3^{n-1}$，

即 $a_n=\frac{3}{2}\bullet 3^{n-1}-\frac{1}{2}$，

可得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{3}{2}（1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}）-\frac{1}{2}n$

$=\frac{3}{2}\bullet\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{1}{2}n=\frac{1}{4}（3^{n+1}-2n-3）$.

故答案为：$\frac{1}{4}（3^{n+1}-2n-3）$.

三、解答题

17．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_3=14$，$a_4-a_1=6$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_1$，$b_3=a_3$，若 $b_6=a_m$，求实数 m 的值.

【考点】等比数列的通项公式；等比数列的性质.

【分析】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_2+a_3=14$，$a_4-a_1=6$．可得 $\begin{cases}2a_1+3d=14\\3d=6\end{cases}$，解得 d，$a_1$ 即可得出.

（2）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_1$，$b_3=a_3$，可得 $\begin{cases}b_1q=4\\b_1q^2=8\end{cases}$，解得 q，$b_1$．可得 b_n．利用 $b_6=a_m$，即可得出.

【解答】解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because a_2+a_3=14$，$a_4-a_1=6$．$\therefore\begin{cases}2a_1+3d=14\\3d=6\end{cases}$，

解得 $d=2$，$a_1=4$．$\therefore a_n=4+2（n-1）=2n+2$.

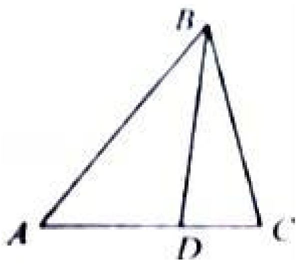
（2）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_1$，$b_3=a_3$，$\therefore\begin{cases}b_1q=4\\b_1q^2=8\end{cases}$，解得 $q=2$，$b_1=2$.

$\therefore b_n=2^n$.

$\because b_6=a_m$，

$\therefore 2^6=2m+2$，解得 $m=31$.

18．如图，在△ABC 中，AB=8，A=60°，点 D 在 AC 上，CD=2，$\cos\angle BDC=\frac{1}{7}$，求 BD，BC．



【考点】正弦定理．

【分析】由已知及同角三角函数基本关系式可求 sin∠BDC，利用诱导公式可求 sin∠ADB，利用正弦定理可求 BD，进而利用余弦定理即可解得 BC 的值．

【解答】（本题满分为 10 分）

解：在△ABC 中，∵$\cos\angle BDC=\frac{1}{7}$，

∴$\sin\angle BDC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，…2 分

∴$\sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle BDC)=\sin\angle BDC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

∴由正弦定理$\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，可得：$BD=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin\angle ADB}=\frac{8\sin60^\circ}{\sin\angle ADB}=7$，…5 分

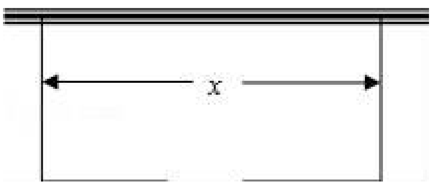
∴由余弦定理可得：$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC=49+4-2\times7\times2\times\frac{1}{7}=49$，

∴BC=7…10 分

19．如图，围建一个面积为 $100m^2$ 的矩形场地，要求矩形场地的一面利用旧墙（旧墙需维修），其余三面围墙要新建，在旧墙的对面的新墙上要留一个宽度为 2m 的进出口，已知旧墙的维修费用为 56 元/米，新墙的造价为 200 元/米，设利用的旧墙长度为 x（单位：米），修建此矩形场地围墙的总费用 y（单位：元）

（1）将 y 表示为 x 的函数；

（2）求当 x 为何值时，y 取得最小值，并求出此最小值．



【考点】基本不等式在最值问题中的应用．

【分析】（1）由题意得矩形场地的另一边长为$\frac{100}{x}$米，根据旧墙的维修费用为 56 元/米，新墙的造价为 200 元/米，求得长度．得出 y 关于 x 的函数表达式；

（2）利用基本不等式求出 y 的最小值，运用等号成立的条件，求出 x 的值．

【解答】解：(1)由题意得矩形场地的另一边长为$\frac{100}{x}$米，

∴y=56x+（x+2•$\frac{100}{x}$ - 2）×200=256x+$\frac{40000}{x}$ - 400（x＞0）.

（2）由（1）得 y=256x+$\frac{40000}{x}$ - 400

$\geq 2\sqrt{256x\cdot\frac{40000}{x}}$ - 400=6000，

当且仅当 256x=$\frac{40000}{x}$时，等号成立，

即当 x=$\frac{25}{2}$米时，y 取得最小值 6000 元.

在 20、21 两个小题中任选一题作答

20．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 csinA=$\sqrt{3}$acosC

（1）求角 C 的值；

（2）若 a=8，c=7，求△ABC 的面积.

【考点】正弦定理；余弦定理.

【分析】(1）利用正弦定理化简 csinA=$\sqrt{3}$acosC．求出 tanC=$\sqrt{3}$，进而可求 C.

（2）利用余弦定理可求 b 的值，根据三角形面积公式即可计算得解.

【解答】(本题满分为 10 分）

解：(1）在△ABC 中，∵csinA=$\sqrt{3}$acosC，

∴由正弦定理得 sinCsinA=$\sqrt{3}$sinAcosC，…3 分

∵0＜A＜π，

∴sinA＞0．从而 sinC=$\sqrt{3}$cosC，

又∵cosC≠0，

∴tanC=$\sqrt{3}$，可得：C=$\frac{\pi}{3}$，…5 分

（2）由（1）可得 C=$\frac{\pi}{3}$，a=8，c=7，

由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2$ - 2abcosC=64+b^2 - 2×$8b\cos\frac{\pi}{3}$=49，

∴b=3，或 b=5，…8 分

∴当 b=3 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$absinC=6$\sqrt{3}$;

当 b=5 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$absinC=10$\sqrt{3}$．…10 分.

21．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 bsinAsinC - $\sqrt{3}$asinBcosC=0

（1）求角 C 的值；

（2）若 a=8，c=7，求△ABC 的面积.

【考点】正弦定理；余弦定理.

【分析】（1）利用正弦定理化简 $c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$．求出 $\tan C=\sqrt{3}$，进而可求 C．

（2）利用余弦定理可求 b 的值，根据三角形面积公式即可计算得解．

【解答】（本题满分为 10 分）

解：（1）∵$b\sin A\sin C-\sqrt{3}a\sin B\cos C=0$，

∴由正弦定理得　$\sin B\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\sin B\cos C$，…3 分

∵$0<A<\pi$，$0<B<\pi$，

∴$\sin A>0$．$\sin B>0$，从而 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$，

又∵$\cos C\neq 0$，

∴$\tan C=\sqrt{3}$，

可得：$C=\frac{\pi}{3}$．…5 分

（2）由（1）可得 $C=\frac{\pi}{3}$，$a=8$，$c=7$，

由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=64+b^2-2\times 8b\cos\frac{\pi}{3}=49$，

∴$b=3$，或 $b=5$，…8 分

∴当 $b=3$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{3}$；

当 $b=5$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=10\sqrt{3}$．…10 分．

在 22、23 两个小题中任选一题作答

22．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $S_{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n+\frac{n+1}{2}$（$n\in N^*$）

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $a_n=2^{n-1}b_n$（$n\in N^*$），数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\geqslant k$ 对于 $n\in N^*$恒成立，求实数 k 的最大值．

【考点】数列的求和；数列递推式．

【分析】(1)由条件可得$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$,运用等差数列的定义和通项公式,可得 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,再由 $a_n=S_n-S_{n-1}$，即可得到所求通项公式；

（2）求得 $b_n=n\bullet(\frac{1}{2})^{n-1}$，运用数列的求和方法：错位相减法，结合等比数列的求和公式，可得前 n 项和为 T_n，再运用作差法判断数列的单调性，求得最小值，即可得到 k 的最大值．

【解答】解：（1）$S_{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n+\frac{1}{2}(n+1)$，

即有$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$，

可得数列$\{\frac{S_n}{n}\}$是首项为 1，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，

即有$\frac{S_n}{n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，

则 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=n$，

上式对 n=1 也成立，

则 $a_n=n$（$n\in N^*$）；

（2）$a_n=2^{n-1}b_n$（$n\in N^*$），

由（1）可得 $b_n=n\bullet(\frac{1}{2})^{n-1}$，

前 n 项和为 $T_n=1\bullet1+2\bullet(\frac{1}{2})+3\bullet(\frac{1}{2})^2+\ldots+n\bullet(\frac{1}{2})^{n-1}$，①

两边乘$\frac{1}{2}$，可得$\frac{1}{2}T_n=1\bullet\frac{1}{2}+2\bullet(\frac{1}{2})^2+3\bullet(\frac{1}{2})^3+\ldots+n\bullet(\frac{1}{2})^n$，②

①﹣②可得，$\frac{1}{2}T_n=1+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^{n-1}-n\bullet(\frac{1}{2})^n$

$=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}-n\bullet(\frac{1}{2})^n$，

化简可得，$T_n=4-\frac{4+2n}{2^n}$．

$T_n\geq k$ 对于 $n\in N^*$恒成立，即为 $k\leq4-\frac{4+2n}{2^n}$的最小值．

由 $T_{n+1}-T_n=4-\frac{2n+6}{2^{n+1}}-(4-\frac{4+2n}{2^n})=\frac{n+1}{2^n}>0$，

数列$\{T_n\}$单调递增，T_1 取得最小值 1，

可得 k≤1．

即有 k 的最大值为 1．

23．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{n}S_n+\frac{1}{2}(n+1)$（$n\in N^*$）

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $a_n=2^{n-1}b_n$（$n\in N^*$），数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $T_n\geq k-\frac{9}{2^n}$对于 $n\in N^*$恒成立，求整数 k 的最大值．

【考点】数列的求和；数列递推式．

【分析】（1）由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，可得$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$，运用等差数列的定义和通项公式，可得 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，再由 $a_n=S_n-S_{n-1}$，即可得到所求通项公式；

（2）求得 $b_n=n\bullet(\frac{1}{2})^{n-1}$，运用数列的求和方法：错位相减法，结合等比数列的求和公式，可得前 n 项和为 T_n，再由参数分离和作差法，可得数列的单调性，求得最小值，即可得到 k 的最大值．

【解答】解：（1）$a_{n+1}=\frac{1}{n}S_n+\frac{1}{2}(n+1)$，

即有 $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n}S_n+\frac{1}{2}(n+1)$，

即 $S_{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n+\frac{1}{2}(n+1)$，

即有 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$，

可得数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是首项为 1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，

即有 $\frac{S_n}{n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，

则 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=n$，

上式对 n=1 也成立，

则 $a_n=n$（$n\in N^*$）；

（2）$a_n=2^{n-1}b_n$（$n\in N^*$），

由（1）可得 $b_n=n\bullet(\frac{1}{2})^{n-1}$，

前 n 项和为 $T_n=1\bullet1+2\bullet(\frac{1}{2})+3\bullet(\frac{1}{2})^2+\ldots+n\bullet(\frac{1}{2})^{n-1}$，①

两边乘 $\frac{1}{2}$，可得 $\frac{1}{2}T_n=1\bullet\frac{1}{2}+2\bullet(\frac{1}{2})^2+3\bullet(\frac{1}{2})^3+\ldots+n\bullet(\frac{1}{2})^n$，②

① - ②可得，$\frac{1}{2}T_n=1+(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^{n-1}-n\bullet(\frac{1}{2})^n$

$=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}-n\bullet(\frac{1}{2})^n$，

化简可得，$T_n=4-\frac{4+2n}{2^n}$．

$T_n\geqslant k-\frac{9}{2^n}$ 即为 $k\leqslant4-\frac{4+2n}{2^n}+\frac{9}{2^n}=4-\frac{2n-5}{2^n}$，

令 $c_n=4-\frac{2n-5}{2^n}$，由 $c_{n+1}-c_n=4-\frac{2n-3}{2^{n+1}}-(4-\frac{2n-5}{2^n})=\frac{2n-7}{2^{n+1}}$，

可得当 $n\leqslant3$ 时，数列$\{c_n\}$单调递减，且 $c_3=4-\frac{6-5}{8}=\frac{31}{8}$；

当 $n\geqslant4$ 时，数列$\{c_n\}$单调递增，且 $c_4=4-\frac{8-5}{16}=\frac{61}{16}$.

由 $c_3>c_4$，可得 $k\leqslant\frac{61}{16}$.

即有 k 的最大值为 3．